

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Rennes septembre 1969 ∞

EXERCICE 1

Étant donné, dans un plan, deux points, A et B, d'une droite Δ , on considère le cercle Γ de diamètre [AB].

Soit P un point de $[\Delta - \Delta \cap \Gamma]$ et Q un point de $[\Delta - \Delta \cap \Gamma]$.

Montrer que les cercles définis, l'un par les trois points A, P et Q, l'autre par B, P et Q, sont orthogonaux.

EXERCICE 2

Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation en z suivante :

$$(4 - 3i)z^2 - (10 + 5i)z + 3 + 5i = 0.$$

PROBLÈME

Partie A

1. n étant un entier *relatif*, on considère l'application f_n de $[n ; n + 1]$ dans \mathbb{R} qui, à $x \in [n ; n + 1]$, fait correspondre le nombre réel

$$f_n(x) = n + 1 - \sqrt{(n + 1) - x}.$$

On désigne par G_n le graphe de f_n , dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et par A_n le point $(n ; n)$.

Pour un n donné, étudier les variations de f_n .

Montrer que f_n est une bijection de $[n ; n + 1]$ sur $[n ; n + 1]$.

A_n et A_{n+1} sont les extrémités de G_n . Peut-on définir une position limite pour chacune des demi-droites A_nM ou $A_{n+1}M$, lorsque M tend respectivement vers A_n ou A_{n+1} en restant sur G_n ?

Dessiner G_0 graphe de $f_0 : f_0(x) = 1 - \sqrt{1 - x}$.

Pour un n donné, montrer qu'il existe une transformation géométrique simple, T_n du plan dans lui-même, telle que G_n soit le transformé de G_0 par T_n .

Dessiner sur une même figure $G_{-2}, G_{-1}, G_0, G_1, G_2$.

2. À tout nombre réel x correspond un entier relatif $n(x)$ tel que

$$n(x) \leq x < n(x) + 1.$$

On définit une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} en posant

$$f(x) = f_{n(x)}(x).$$

Par exemple, si $x = -\sqrt{3}$, $n(x) = -2$ et $f(-\sqrt{3}) = f_{-2}(-\sqrt{3}) = -1 - \sqrt{\sqrt{3} - 1}$.

Montrer que f est une fonction monotone et continue sur \mathbb{R} .

Est-elle dérivable en tout point de \mathbb{R} ?

Le graphe, G , de f peut-il s'obtenir simplement à partir des graphes G_n des fonctions f_n ?

Partie B

1. f étant la fonction qui vient d'être définie, on considère l'application Φ du plan dans lui-même qui, au point de coordonnées $(x ; y)$, fait correspondre le point de coordonnées $(x' ; y')$ telles que

$$x' = f(x), \quad y' = \sqrt{|y|}.$$

On écrit $\Phi[(x ; y) = [f(x), \sqrt{|y|}]$.

Montrer que Φ n'est ni injective, ni surjective.

n étant un entier relatif, \mathcal{B}_n désigne l'ensemble des points de coordonnées $(x ; y)$ telles que

$$x \in [n ; n + 1], \quad y \geq 0;$$

montrer que $\Phi(\mathcal{B}_n) = \mathcal{B}_n$.

2. n étant un entier relatif et A_n le point de coordonnées $(n ; n)$, étudier le transformé par Φ du segment de droite $A_n A_{n+1}$.

(Distinguer les cas $n \geq 0$ et $n < 0$.)

$\mathcal{A}_n = \Phi(A_n A_{n+1})$ est un arc d'une courbe, que l'on caractérisera géométriquement suivant la valeur de n .

Dessiner sur une même figure \mathcal{A}_{-2} , \mathcal{A}_{-1} , \mathcal{A}_0 , \mathcal{A}_1 .