Durée : 4 heures

Baccalauréat C République Centrafricaine septembre 1969

EXERCICE 1

Déterminer le domaine de définition et étudier les variations de la fonction f donnée par

$$f(x) = x + \text{Log}\left(2 - \text{e}^x\right).$$

Représenter graphiquement cette fonction.
Déterminer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\,;\ y)$ sont solutions de l'inéquation

$$\text{e}^{y-x} + \text{e}^x > 2.$$

EXERCICE 2

Trois ensembles E_1, E_2 et E_3 sont composés respectivement de n_1, n_2 et n_3 éléments (n_1, n_2 et n_3 entiers positifs) ; on désigne par
p_1 le nombre d'éléments de l'ensemble $\text{E}_2 \cap \text{E}_3 = I_1$
p_2 le nombre d'éléments de l'ensemble $\text{E}_3 \cap \text{E}_1 = I_2$
p_3 le nombre d'éléments de l'ensemble $\text{E}_1 \cap \text{E}_2 = I_3$,
puis on pose

$$d\left(\text{E}_2, \text{E}_3\right) = n_2 + n_3 - 2p_1, d\left(\text{E}_3, \text{E}_1\right) = n_3 + n_1 - 2p_2, d\left(\text{E}_1, \text{E}_2\right) = n_1 + n_2 - 2p_3.$$

1. Montrer que $d\left(\text{E}_2, \text{E}_3\right)$ est nul si, et seulement si, les ensembles E_2 et E_3 sont égaux.
2. Montrer que le nombre N défini par

   $$N = d\left(\text{E}_1, \text{E}_2\right) + d\left(\text{E}_3, \text{E}_1\right) - d\left(\text{E}_2, \text{E}_3\right)$$

   est positif ou nul.

PROBLÈME

1. **a.** Déterminer l'ensemble de définition commun aux deux fonctions f_1 et f_2 données par

   $$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}\left(-3x + 1 + \sqrt{6x - 3}\right),\\ f_2(x) &= \frac{1}{2}\left(-3x + 1 - \sqrt{6x - 3}\right).\end{aligned}$$

   Étudier les variations de chacune de ces fonctions ; les représenter dans un même plan rapporté, à un repère cartésien. (La réunion de ces deux graphiques est une parabole P ; les candidats n'ont pas à le démontrer.)

   b. Montrer que f_2 admet une fonction réciproque ; indiquer son intervalle de définition ; en est-il de même pour f_1 ? Donner l'expression de la fonction réciproque de f_2.

2. On donne, dans un plan, quatre points O, A, B, C tels que O, A, B ne soient pas alignés et que

$$\overrightarrow{\text{OC}} = \overrightarrow{\text{OA}} - 2\overrightarrow{\text{OB}};$$

α et λ étant deux nombres réels, on définit successivement les points G_1, G_2 et G par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{\text{G}_1\text{C}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\text{G}_1\text{B}} &= \overrightarrow{0}, \\ \alpha\overrightarrow{\text{G}_2\text{O}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\text{G}_2\text{C}} &= \overrightarrow{0}, \\ \lambda\overrightarrow{\text{GG}_1} + (1-\lambda)\overrightarrow{\text{GG}_2} &= \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\text{OG}_1}$ et $\overrightarrow{\text{OG}_2}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{OA}}$, $\overrightarrow{\text{OB}}$ et du nombre α ; les points G_1 et G_2 peuvent-ils être confondus ?

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{OG}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{OA}}$, $\overrightarrow{\text{OB}}$ et des nombres α et λ.

On prend un repère cartésien d'origine O, les vecteurs de base étant $\overrightarrow{\text{OA}}$, $\overrightarrow{\text{OB}}$. Quelles sont les coordonnées du point G ?

Quel est le lieu du point G quand, α restant fixe et égal à α_1, λ varie ?

Quel est le lieu du point G quand, λ restant fixe et égal à λ_1, α varie ?

3. Les notations des parties précédentes étant conservées, on se donne le point du plan qui a pour coordonnées x_0 et y_0 et l'on se propose de déterminer α et λ pour que le point G soit confondu avec ce point donné.

Ramener ce problème à la résolution d'une équation du second degré en α et montrer que le problème n'a de solution que si

$$\left(3x_0 + 2y_0 - 1\right)^2 - 6x_0 + 3 \geqslant 0.$$

4. En utilisant les résultats de la première question, déterminer l'ensemble des points du plan pour lesquels le problème précédent a deux solutions ; montrer que sur toute droite G_1G_2 il y a un point G_3, et un seul, pour lequel le problème précédent a une seule solution ; calculer les coordonnées de G_3 en fonction de α et montrer que la droite G_1G_2 est tangente en G_3 à son lieu.