Baccalauréat Rome juin 1954
Série mathématiques

I.

1^er^ sujet

Résoudre l'équation $a\cos x + b\sin x = c$.
On exposera une seule méthode.

Résoudre $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -1$.

I.

2^e^ sujet

Résoudre un triangle, connaissant les trois côtés.

I.

3^e^ sujet

Limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0 (x exprimé en radians).

Dérivée de $y = \cos(ax + b)$.

II.

1. On considère un cercle (C), de rayon R. Soit O un point fixe de ce cercle et OA, OB deux cordes telles que $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   Soient (C_1) et (C_2), les cercles symétriques de (C) respectivement par rapport à OA et OB. Montrer que (C_1) et (C_2) sont tangents en O.
   Que peut on dire des tangentes à (C_1) et (C_2) en A et B ?
2. On se propose, à l'aide d'une inversion de centre O, de puissance 4R^2, d'étudier les cercles tangents à (C), (C_1) et (C_2).
   Construire avec précision la figure inverse de la figure formée par ces trois cercles.
   Montrer qu'il existe deux cercles tangents à (C), (C_1) et (C_2), l'un, (Ω), fixe, de centre O et de rayon 2R, l'autre, (Γ), variable quand OA pivote autour de O.
   Étudier les cercles inverses des cercles (l'). Quelle est leur enveloppe ? En déduire l'enveloppe des cercles (Γ).
   Montrer que le lieu des centres des cercles (Γ) est une conique, dont on précisera les éléments.
3. Soit OX une direction choisie sur la tangente en O à (C). On pose $\left(\overrightarrow{\text{OX}},\ \overrightarrow{\text{OA}}\right) = \varphi$. Calculer en fonction de R et φ le rayon r de (Γ).
   Variations de r en fonction de φ quand φ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Graphique.
4. φ ayant une valeur fixe égale à $\frac{\pi}{4}$ on considère les cercles
   (Γ_1) tangent à (C), (C_1) et (C_2),
   (Γ_2) tangent à (C_1), (C_2) et (Γ_1),
   (Γ_3) tangent à (C_1), (C_2) et (Γ_2),
   etc.
   Calculer le rayon de (Γ_n).