

∞ **Baccalauréat Rome septembre 1956** ∞
série mathématiques

I. 1^{er} sujet

Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

On se bornera à exposer cette question sur l'exemple suivant :

$$\begin{cases} m^2x + y = 1, \\ x + m^2y = m, \end{cases}$$

m désignant un paramètre.

I. 2^e sujet

Étude des variations de la fonction

$$y = \frac{x^2 + 6x + 8}{x(x-2)}.$$

Représentation graphique de cette fonction.

I. 3^e sujet

Notion de fonction primitive d'une fonction donnée.

Application au calcul de l'aire limitée par l'axe $z'Oz$, les parallèles à $y'Oy$ d'abscisses respectives a et x , et la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$, cette fonction étant définie, positive, croissante dans l'intervalle $(a; b)$ et x étant dans cet intervalle.

II. Problème

Étant données deux droites $u'Ou$, $v'Ov$ se coupant en O, on désigne par 2α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) l'angle des deux demi-droites Ou , Ov , par $x'Ox$ la bissectrice de cet angle et de l'angle opposé par le sommet, par (P) le plan perpendiculaire au plan uOv le long de $x'Ox$.

1. Une sphère variable (S), de rayon constant R, reste tangente aux deux droites $u'Ou$, $v'Ov$, et son centre I reste dans le plan (P).
Trouver, dans ces conditions, le lieu (E) de I. (On pourra, par exemple, chercher la relation qui lie les coordonnées x et y de I par rapport au système d'axes constitué, dans le plan (P), par $x'Ox$ et par la perpendiculaire $y'Oy$ élevée en O au plan uOv .)
Le grand cercle de (S) dont le plan est perpendiculaire à $x'Ox$ perce le plan uOv en deux points, M et N, dont on demande le lieu géométrique lorsque (S) varie comme il est dit ci-dessus.
2. Un cercle (C) variable, de rayon *constant* R, rencontre constamment les deux droites fixes $u'Ou$, $v'Ov$; le plan de ce cercle reste perpendiculaire à $x'Ox$. Trouver, dans ces conditions, le lieu, (E'), de son centre J.
3. Évaluer l'aire A de la portion de (P) comprise entre les deux courbes (E) et (E').
Comment varie cette aire lorsque α varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Montrer que, pour toute valeur de α prise dans cet intervalle, les points où (E') coupe $x'Ox$ occupent par rapport à (E) des positions remarquables, que l'on précisera.

4. On donne dans le plan uOv une droite Δ perpendiculaire à $x'Ox$ au point T d'abscisse $\overline{OT} = \lambda R$ ($\lambda \geq 0$) et l'on désigne par (Q) l'un des deux plans qui passent par Δ et qui font avec le plan uOv un angle φ donné ($0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$).

Déterminer les sphères (S) du **1.** qui sont tangentes au plan (Q).

Discuter en prenant λ comme paramètre et en supposant R, α , et φ constants.

Application numérique : $\cotg \alpha = 4$, $\sin \varphi = \frac{3}{5}$.