

## ♣ Baccalauréat C et E Rouen juin 1988 ♣

### EXERCICE 1

5 POINTS

Soit  $\theta$  un réel appartenant à l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ .

On considère l'équation (E) d'inconnue complexe  $z$

$$(E) \quad \cos^2 \theta z^2 - 4 \cos \theta z + 5 - \cos^2 \theta = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.  
Préciser pour quelle valeur de  $\theta$  l'équation admet une racine double. Donner la valeur de cette racine double.
2. Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal. On appelle  $M'$  et  $M''$  les points de P dont les affixes respectives sont les nombres  $z'$  et  $z''$  solutions de l'équation (E).  
Montrer que lorsque  $\theta$  varie,  $M'$  et  $M''$  se déplacent sur une hyperbole (H).  
Déterminer le centre, les sommets et les asymptote de (H). Tracer (H).
3. Montrer que, lorsque  $\theta$  décrit l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ , l'ensemble (E) décrit par les points  $M'$  et  $M''$  est une branche de (H).

### EXERCICE 2

5 POINTS

Soit dans le plan P orienté un triangle ABC rectangle en A tel que  $AC = 2AB$  et

$$\left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Soit  $\mathcal{C}(B)$  le cercle de centre B et de rayon AB et  $\mathcal{C}(C)$  le cercle de centre C et de rayon AC. Ces deux cercles passent par A. On appelle E leur second point d'intersection.

1. Soit S une similitude directe transformant  $\mathcal{C}(B)$  en  $\mathcal{C}(C)$ .  
Quelle est la valeur du rapport de la similitude S?  
On désigne par I le centre de S. Quelle est la valeur du rapport  $\frac{IC}{IB}$ ?  
Quel est l'ensemble ( $\Gamma$ ) des centres I des similitudes directes transformant  $\mathcal{C}(B)$  en  $\mathcal{C}(C)$ . Représenter cet ensemble.
2. Soit  $S_A$  la similitude directe de centre A transformant B en C. Soit F le point de  $\mathcal{C}(C)$  diamétralement opposé à E.  
Démontrer que l'image de E par  $S_A$  est le point F.

### PROBLÈME

10 POINTS

Le problème propose l'étude d'une famille de fonctions (partie A), d'une suite (partie B) et d'une courbe (partie C) définies à partir de ces fonctions.

#### Partie A

Dans cette partie, on met en place des résultats qui seront utilisés dans les parties B et C. On désigne par  $\ln$  le logarithme népérien et par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

On considère, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}.$$

1. Déterminer les limites de  $f_n$  aux bornes de l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
Étudier les variations de  $f_n$ .
2. Construire la courbe représentative ( $\mathcal{C}_1$ ) de la fonction  $f_1$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal. Préciser ses asymptotes
3. Pour tout réel  $X$  supérieur ou égal à 1 on pose :

$$I_n(X) = \int_1^X f_n(t) dt :$$

(La justification de l'existence de  $I_n$ , propriété connue, n'est pas demandée.)

- a. Calculer  $I_1(X)$ .
- b. En utilisant une intégration par parties, calculer  $I_n(X)$  en fonction de  $n$  et de  $X$ , pour  $n$  supérieur ou égal à 2.  
Déduire de ce résultat la valeur de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} f_1(t) dt.$$

4. Soit  $n$  un entier naturel non nul fixé.  
Calculer la limite de  $I_n(X)$  quand  $X$  tend vers  $+\infty$ . (On distinguera deux cas  $n = 1$  et  $n \geq 2$ .)  
Calculer la limite quand  $X$  tend vers  $+\infty$  de  $\int_2^X f_2(t) dt$ .

### Partie B

Étude d'une suite définie à partir de  $f_2$ .

On considère la fonction  $f_2$  définie en partie A par :

$$f_2(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel  $k$ ,  $k \geq 2$  :

$$f_2(k+1) \leq \int_k^{k+1} f_2(t) dt \leq f_2(k).$$

(On peut utiliser le sens de variation de  $f_2$ )

2. On considère la suite  $S$  définie par son terme général

$$S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \dots + \frac{\ln p}{p^2} \text{ où } p \text{ est un entier naturel supérieur ou égal à } 2.$$

- a. Montrer que la suite  $S$  est croissante.
- b. En utilisant B 1., montrer que :

$$S_p - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^p f_2 dt \leq S_p - \frac{\ln p}{p^2}$$

et en déduire un encadrement de  $S_p$ .

- c. En utilisant la valeur de  $\int_2^p f_2 dt$  trouvée en A, montrer que la suite  $S$  est majorée.
- d. Montrer que la suite  $S$  est convergente et que sa limite  $L$  vérifie :

$$\frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} \leq L \leq \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{4}.$$

### Partie C

Étude d'une courbe définie paramétriquement à partir des fonctions  $f_n$ .

On considère la courbe  $(\Gamma_1)$  définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

où  $t$  est un réel appartenant à l'intervalle  $[1; 10]$ .

1. Représenter dans un même tableau les variations des deux fonctions qui à  $t$  associent respectivement  $x(t)$  et  $y(t)$ .
2. Représenter la courbe  $(\Gamma_1)$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 20 cm).  
Préciser les points de  $(\Gamma_1)$  en lesquels les tangentes sont parallèles à l'un ou l'autre des axes de coordonnées.