

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Rouen juin 1969 ∞

EXERCICE 1

1. Calculer $(1 + i)^2$.
2. Résoudre dans le corps des complexes l'équation

$$z^6 - (1 - i)z^{-i} = 0.$$

EXERCICE 2

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = x - 1 + e^{-x}.$$

1. Étudier les variations de cette fonction. Construire la courbe représentative, (C) , dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. On étudiera les branches infinies de (C) .
2. Calculer l'aire, $S(m)$, du domaine limité par l'axe $y'Oy$, la courbe (C) et les droites d'équations $y = x - 1$ et $x = m$, m étant un nombre positif donné.
Cette aire a-t-elle une limite quand m tend vers $+\infty$?

PROBLÈME

On donne un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. On considère les deux fonctions vectorielles de la variable réelle définies par

$$\begin{aligned} t \mapsto \overrightarrow{V_1(t)} &= (a \cos \alpha t) \vec{i} + (a \sin \alpha t) \vec{j} \\ \text{et } t \mapsto \overrightarrow{V_2(t)} &= (b \cos t) \vec{i} - (b \sin t) \vec{j}, \end{aligned}$$

où a et b sont deux nombres positifs donnés ($0 < b < a$) et où α est un entier positif non nul.

1. On désigne par M_1 et M_2 les points tels que

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{V_1(t)} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{V_2(t)}.$$

Quels sont les ensembles, (C_1) et (C_2) , des points M_1 et M_2 quand t décrit \mathbb{R} ?

Montrer que $(\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_1}) \equiv (\alpha + 1)t \pmod{2\pi}$.

Combien existe-t-il de droites M_1M_2 passant par le point O ?

2. On considère le point M tel que

$$(\alpha + 1)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \alpha \overrightarrow{OM_2}$$

et la fonction vectorielle

$$t \mapsto \overrightarrow{V_1(t)} = \overrightarrow{OM}.$$

- a. Montrer que M appartient à la droite M_1M_2 .

Soit $\vec{V}'(t)$ le vecteur dérivé de $\vec{V}(t)$. Calculer le produit scalaire $\vec{V}'(t) \cdot \vec{V}(t)$.

En déduire la construction de la tangente en M à l'ensemble, (E), des points M .
(On ne demande pas la construction de cet ensemble.)

- b. Soit $\vec{V}''(t)$ le vecteur dérivé de $\vec{V}'(t)$. Quel est l'ensemble des points N tels que $\vec{MN} = \vec{V}''(t)$?

Déterminer α pour que cet ensemble soit l'ensemble (C_1) .

3. On suppose désormais que $\alpha = 1$.

- a. Quel est l'ensemble, (E), des points M ?

- b. On pose $A = \frac{a+b}{2}$, $B = \frac{a-b}{2}$ et l'on suppose $t \neq k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Former l'équation de la tangente (Δ) à l'ensemble (E) au point M .

Montrer que (Δ) est médiatrice de M_1M_2 ?

Cette tangente coupe $x'x$ en U et $y'y$ en V . Calculer $z = UV^2$ en fonction de t .

Montrer qu'il existe une valeur de t comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour laquelle la longueur UV est minimale. (On calculera $\operatorname{tg} t$.)

- c. Montrer que les droites $x'x$ et $y'y$ sont les bissectrices de l'angle M_1OM_2 .

La droite M_1M_2 coupe $x'x$ en Q et $y'y$ en P .

Quelles sont les polaires de P et de U par rapport au cercle (V) , de centre V , passant par M_1 et M_2 ?

Montrer que le cercle (V) coupe la droite UV en deux points, I' et I , conjugués harmoniques par rapport à U et M .

En déduire les coordonnées des points I' et I .

I étant le point ayant une abscisse positive, quel est l'ensemble des points I lorsque t décrit l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$?

- d. Montrer que les coordonnées du milieu, ω , de IU sont

$$x = A \left(1 + \frac{1}{\cos t} \right) \quad \text{et} \quad Y = \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2}.$$

En déduire que l'ensemble, (Γ) , des points ω lorsque t varie sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ est une partie de la courbe d'équation

$$y = \frac{B}{2} \sqrt{\frac{x-A}{x}}.$$

Construire (Γ) .