∽ Baccalauréat C Rouen juin 1971 ∾

EXERCICE 1

Trouver, selon les valeurs de $n (n \mathbb{N})$, le reste de la division par 11 du nombre

$$a = 10^{2n+4} - 2\,.\,10^{n+2} + 1.$$

EXERCICE 2

ABC est un triangle dans lequel l'angle A est aigu. Le point O est le milieu du côté BC ; on désigne par (O) le cercle de diamètre [BC].
M et M′ sont deux points variables de la droite BC, conjugués harmoniques par rapport à B et à C.

1. Montrer que, les cercles (Ω) passant par A, M et M′ recoupent la droite OA en un point fixe, A′.
   En déduire que les centres des cercles (Ω) appartiennent à une droite fixe (Δ).
2. On désigne par $\mathcal{J}$ l'inversion de pôle A qui laisse le cercle (O) invariant.
   Déterminer les transformés, par $\mathcal{J}$, de la droite BC, d'un cercle (Ω) et de la droite (Δ).

PROBLÈME

1. Étudier les variations de la fonction f, définie dans $\mathbb{R} - \{0\}$ par la relation

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}.$$

   Construire la courbe représentative (Γ) de f dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, d'axes $x'x$ et $y'y$.
   Donner l'équation de chacune des asymptotes.
2. La droite (Δ) d'équation $x = -1$ coupe en A l'axe $x'x$. La courbe (Γ) coupe en B son asymptote oblique.
   Évaluer à 0,01 près l'aire du domaine limité par l'arc AB de (Γ), l'asymptote oblique et (Δ).
3. La droite variable (D) d'équation $y = m(x+1)$ recoupe (Γ) en M et N, pour certaines valeurs du paramètre réel m, que l'on précisera.
   Soit (C) le cercle passant par M et N et ayant son centre sur l'axe $x'x$. Démontrer, à l'aide d'une relation indépendante de m entre les abscisses de M et N, que A est le pôle de $y'y$ par rapport au cercle (C).
4. Déduire de ce dernier résultat
   a. que les cercles (C) appartiennent à un faisceau linéaire, dont on précisera la nature et les éléments remarquables,

b. que les pentes des droites OM et ON sont liées par une relation simple,

c. que les tangentes à (C) en M et N se coupent sur $y'y$.

d. que les tangentes à (Γ) en M et N se coupent sur $y'y$.

5. Soit (γ) la courbe d'équation

$$y = \frac{x+1}{|x|}\sqrt{x+1}.$$

a. Montrer que la droite (D) variable d'équation

$$y = m(x+1)$$

coupe la la courbe (γ) en trois points au plus, A, P et Q.

Les points P et Q ont-ils une position limite quand m tend vers zéro ? Interpréter géométriquement les résultats.

b. En utilisant ces renseignements et ceux qui sont fournis par l'étude de f à la première question, tracer (γ).