Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Rouen juin 1972 ∾

EXERCICE 1

Soit la suite des n nombres complexes,

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p, \quad \ldots, \quad u_n$$

définie par

$$u_1 = 1 - \mathrm{i} \quad \text{et, } \forall p \in [2~;~n], \quad u_p = u_{p-1} \cdot \mathrm{j}$$

avec $\mathrm{j} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

1. Vérifier que $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.
2. Montrer que, pour tout entier p tel que $4 \leqslant p \leqslant n$, on a $u_p = u_{p-3}$.
   Construire les images des nombres u_p.
3. En déduire, suivant la forme de n, la valeur de

   $$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_p,$$

   puis calculer les expressions

   $$\sigma_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2p\frac{\pi}{8}\right)$$

   $$\text{et } \sigma'_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \sin\left(-\frac{\pi}{4} + 2p\frac{\pi}{8}\right)$$

EXERCICE 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par les formules

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0 \\ f(x) & = & x\text{Log}\,|x| \quad \text{pour} x \neq 0, \end{array}\right.$$

1. La fonction f est-elle continue pour la valeur 0 de la variable ?
   Est-elle dérivable en ce point ?
   Justifier les réponses.
2. Déterminer la fonction dérivée f'. Étudier la variation de f ; en donner une représentation graphique cartésienne, dans un repère orthonormé $(x'\mathrm{O}x, y'\mathrm{O}y)$.
3. Au moyen d'une intégration par parties trouver les primitives de la fonction f.
   Calculer l'aire du domaine limité par la courbe représentative de f, l'axe $x'\mathrm{O}x$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

PROBLÈME

Dans un plan euclidien affine, (P), rapporté à un repère cartésien orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, on considère les points A, B, C, D et E, tels que

$$\overrightarrow{\text{OA}} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{\text{AB}} = 2\vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{\text{BC}} = \overrightarrow{\text{CD}} = -\vec{\imath} \quad \text{et } \overrightarrow{\text{DE}} = -\frac{1}{2}\vec{\jmath}.$$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction numérique, f, de la variable réelle, x, telle que

$$f(x) = \frac{x^2+3x+6}{2(x+1)}.$$

Soit (Φ) la courbe représentative de f dans (P).

2. Tracer cette courbe en précisant, en particulier, ses asymptotes et son centre de symétrie.

3. Soit s la symétrie par rapport à la droite (ED) et de direction $\overrightarrow{\text{EC}}$.

On pose $s(M) = M'$. Calculer le couple $\left(x'\,;\,y'\right)$ des coordonnées du point M', en fonction de celui, $(x\,;\,y)$, des coordonnées de M.

Quelle est l'équation de la courbe, (Φ_1) transformée de (Φ) par s ? Tracer cette courbe (Φ_1) sur la même figure que (Φ).

4. Soit g l'application affine telle que

$$g(\text{O}) = \text{E}, \quad g(\text{A}) = \text{C} \quad \text{et } g(\text{B}) = \text{D}.$$

Quelle est, dans la base $\left(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\right)$, la matrice de l'application linéaire, γ, associée à g ?

Démontrer que g est bijective.

5. Étant donné le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$, on pose $M'' = g(M)$. Calculer, en fonction de x et de y, le couple $\left(x''\,;\,y''\right)$ des coordonnées du point M''.

6. Quelles sont les équations cartésiennes des courbes (ψ) et $\left(\psi_1\right)$ transformées respectives de (Φ) et de (Φ_1) par l'application, g^{-1}, réciproque de g ?

On donnera, de ces courbes, des définitions géométriques simples.

7. Donner une définition géométrique simple de l'application composée $g^{-1} \circ s \circ g$.