

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Rouen juin 1976 ∞

EXERCICE 1

k étant un entier relatif, on pose :

$$x = 2k - 1 \quad y = 9k + 4$$

Montrer que tout diviseur commun à x et à y divise 17.

En déduire, suivant les valeurs de k , le plus grand diviseur commun de x et y .

EXERCICE 2

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes le système

$$\begin{cases} 2iz_1 - z_2 = 1 - 6i \\ z_1 + 2iz_2 = i \end{cases}$$

2. Dans un plan affine euclidien orienté identifié au plan complexe, déterminer les rotations de mesure $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ transformant le point m_1 d'affixe z_1 en le point m_2 d'affixe z_2 .

PROBLÈME

On rappelle que l'ensemble \mathcal{A} des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , muni de l'addition de deux fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel, est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Soit \mathcal{D} l'ensemble des applications $f \in \mathcal{A}$ admettant, pour tout entier naturel non nul n , une dérivée d'ordre n notée $f^{(n)}$ (ou f' pour $n = 1$, f'' pour $n = 2$, ...).

Partie A

1. a. Montrer que \mathcal{D} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

b. On considère l'ensemble E des applications de \mathcal{A} définies par :

$$f_{a,b}(x) = ae^{2x} + be^{-2x} \quad \text{avec } (a; b) \in \mathbb{R}^2$$

Établir que E est un espace vectoriel de base $(f_{1,0}; f_{0,1})$ tel que :

$$\forall f_{a,b} \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (f''_{a,b} - 4f_{a,b})(x) = 0$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , l'application ϕ_n dans \mathcal{A} qui à $f_{a,b} \in E$ associe $f_{a,b}^{(n)}$ est un endomorphisme de E ; en donner la matrice dans la base $(f_{1,0}; f_{0,1})$.

En déduire que :

a. Pour n pair, ϕ_n est une homothétie vectorielle dont on précisera le rapport.

- b.** pour n impair, ϕ_n est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une symétrie vectorielle qu'on précisera.
- 3. a.** Montrer que P , ensemble des fonctions paires de E , et J , ensemble des fonctions impaires de E , sont deux droites vectorielles de E de base respective $f_{1,1}$ et $f_{1,-1}$ telles que :

$$E = P \oplus J.$$

(P et J supplémentaires dans E).

- b.** Étudier les variations des fonctions $f_{1,1}$ et $f_{1,-1}$.
Tracer leurs courbes représentatives dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé.
Vérifier que $f_{1,-1}$ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} ; définir sa bijection réciproque.

Partie B

On pose, pour f et g de \mathcal{D} :

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t) dt.$$

- 1. a.** Établir que :

$$\forall (f, g, h) \in \mathcal{D}^3, \quad (f+g) \star h = (f \star h) + (g \star h)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (f; g) \in \mathcal{D}^2, \quad (\alpha f) \star g = \alpha(f \star g)$$

- b.** A étant l'élément de \mathcal{D} défini par :

$$A(x) = 2x^2 - 1$$

calculer $(f_{1,0} \star A)(x)$ et $(f_{0,1} \star A)(x)$.

(On pourra intégrer par parties).

- 2.** Dédire du B 1. que l'application

$$\phi : f \in \mathcal{D} \mapsto f \star A \in \mathcal{A}$$

est linéaire et que l'image $\phi(E)$ de E par ϕ est un espace vectoriel de dimension 2 dont on précisera une base.