

❧ Baccalauréat C Rouen juin 1977 ❧

EXERCICE 1

3 POINTS

On considère la fonction f :

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{x-2}{(2x-3)^2}.$$

Montrer qu'il existe deux réels A et B tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \quad f(x) = \frac{A}{(2x-3)^2} + \frac{B}{2x-3}$$

Calculer $I = \int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)^2} dx$.

EXERCICE 2

3 POINTS

Soit f une application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = z^3 + bz^2 + cz + d$$

où b, c, d sont trois nombres complexes.

Déterminer b, c, d sachant que

$$\begin{cases} f(i) & = 0 \\ f(1) & = -4i \\ f(-i) & = -8i \end{cases}$$

b, c, d étant choisis, résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.

PROBLÈME

14 POINTS

Dans le plan affine (P) rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on définit la loi de composition interne notée \star , qui au couple de points $(M; M')$ de coordonnées respectives $(x; y), (x'; y')$ associe le point m de coordonnées $(xx'; xy' + x'y)$.

Partie A

1. On appelle (P^*) l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ de (P) tels que x soit différent de 0.

Démontrer que (P^*) est stable pour la loi \star .

Par abus de langage, la loi induite par \star sur (P^*) sera encore notée \star .

Démontrer que (P^*, \star) est un groupe commutatif.

Soit (P_1) l'ensemble des points de (P^*) d'ordonnée nulle.

Démontrer que (P_1, \star) est un sous-groupe de (P^*, \star) isomorphe à (\mathbb{R}^*, \times) .

2. Soit $A(a; b)$ un point donné de (P^*) .

On appelle φ_A l'application de (P) vers (P) qui au point M associe le point M' vérifiant :

$$\varphi_A(M) = M' = A \star M$$

Calculer les coordonnées de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M .

Montrer que φ_A est une application affine de (P) .

Donner la matrice de l'endomorphisme associé dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

Reconnaitre φ_I où I est l'élément neutre de (P^*, \star) et φ_N où N est un point quelconque de (P_1) .

Déterminer les points invariants de φ_A . Discuter suivant A .

Partie B

On se propose de rechercher les fonctions numériques réelles f définies et dérivables sur \mathbb{R}^* , telles que la représentation graphique (Γ^*) de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ soit un sous-groupe de (P^*, \star) .

1. On suppose que le problème admet une solution f de représentation graphique (Γ^*) .

Soit M_1 et M_2 deux points quelconques de (Γ^*) d'abscisses respectives x_1 et x_2 . En écrivant que (Γ^*) est stable pour \star , établir une relation (1) liant f , x_1 et x_2 .

Soit g la fonction numérique réelle définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Quelle relation (2) lie g , x_1 et x_2 ?

Cette relation étant vérifiée quels que soient x_1 et x_2 réels non nuls, démontrer que g vérifie :

$$(3) \quad \begin{cases} g(1) = 0 & g(-1) = 0 \\ g \text{ est une fonction paire} \\ x \in \mathbb{R}^*, & g'(x) = \frac{g'(1)}{x} \end{cases}$$

En déduire la forme générale des fonctions g vérifiant (3), puis celle des fonctions f susceptibles de répondre à la question.

2. Vérifier que les représentations graphiques des fonctions f trouvées au B - 1. sont bien des sous groupes de (P^*, \star) .

3. Soit (Γ_1) la courbe représentative dans (P) de la fonction f_1 définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f_1(x) = x \text{Log}|x|.$$

a. Étudier les variations de f_1 et construire (Γ_1) . Montrer que f_1 peut être prolongée par continuité pour $x = 0$ et que la courbe ainsi obtenue admet à l'origine une tangente que l'on déterminera.

- b.** Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la portion de plan comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 1$ avec $0 < \lambda < 1$. $\mathcal{A}(\lambda)$ admet-elle une limite quand λ tend vers 0? Pouvait-on le prévoir?
- 4.** Soit B le point de (Γ_1) d'abscisse e (base des logarithmes népériens), C le point de (Γ_1) d'abscisse $\frac{1}{e}$. La droite (IC) recoupe la courbe (Γ_1) en un point D. La droite (IB) recoupe la courbe (Γ_1) en un point E.
Démontrer sans calculs que $E = B \star D$
(On admettra que ces points E et D existent et sont uniques).
- N. B.** - La question B - 3. est indépendante de ce qui précède.