

♣ Baccalauréat C Rouen juin 1979 ♣

EXERCICE 1

3 POINTS

On dispose de deux dés cubiques dont chaque face a la même probabilité d'apparaître après un lancer.

L'un a une face numérotée 0, deux faces numérotées 1, trois faces numérotées 2; l'autre a trois faces numérotées 0, deux faces numérotées 1, une face numérotée 2.

1. On définit une variable aléatoire, X , par la somme des numéros de la face supérieure de chaque dé après un lancer simultané.
Déterminer la loi de probabilité de X , calculer son espérance mathématique et sa variance.
2. Pour chaque lancer simultané des deux dés, on appelle succès la réalisation d'une somme égale à 4. On effectue n lancers des deux dés.
Calculer n tel que l'espérance mathématique du nombre de succès soit égale à 1.

EXERCICE 2

4 POINTS

1. Calculer $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$.
2. Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- a. Étudier les variations de f . Dessiner la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (On se contentera de déterminer les points de la courbe d'abscisses -1 , 0 et 1 et les tangentes à la courbe en ces points; on ne demande pas d'étudier les branches infinies).
- b. Dire pourquoi f admet une application réciproque g dont on déterminera le nombre dérivé pour la valeur $y_0 = f(x_0)$ en fonction de y_0 .
- c. y étant un réel fixé, résoudre

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

En déduire l'expression de g puis retrouver $g'(y_0)$.

PROBLÈME

13 POINTS

Soit E un plan vectoriel réel, P un plan affine de direction E et $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère de P .
On considère les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{2}(\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}).$$

et les points I , A et B de coordonnées respectives :

$$\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \quad \left(0\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(0\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

On désigne par :

- Δ_1 et Δ_2 les droites vectorielles engendrées respectivement par \vec{e}_1 et \vec{e}_2 ;
- D_1 et D_2 les droites affines contenant I et de directions respectives Δ_1 et Δ_2 .

Partie A

- Démontrer que (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est une base de E .
 - On appelle p_1 la projection vectorielle sur Δ_1 de direction Δ_2 et p_2 la projection vectorielle sur Δ_2 de direction Δ_1 . Démontrer que :

$$p_1 + p_2 = \text{Id}_E, \quad p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = \theta_E \quad \text{et} \quad p_1 \circ p_1 = p_1.$$

(Id_E est l'application identique de E et θ_E l'application nulle de E).

- À tout nombre réel k non nul, on associe l'endomorphisme de E ,

$$\varphi_k = k \cdot p_1 + \frac{1}{k} \cdot p_2$$

et on désigne par $\Phi(E)$ l'ensemble des φ_k lorsque k décrit \mathbb{R}^* .

- Démontrer que $\varphi_k(\vec{e}_1) = k \cdot \vec{e}_1$ et $\varphi_k(\vec{e}_2) = \frac{1}{k} \cdot \vec{e}_2$.
- En déduire que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \rightarrow & \Phi(E) \\ k & \mapsto & \varphi_k \end{array}$$

est bijective.

- Exprimer $\varphi_k \circ \varphi_{k'}$ en fonction de k, k', p_1 et p_2 .

Partie B

On appelle f_k l'application affine de \mathbb{P} , d'endomorphisme associé φ_k et laissant I invariant. Soit G l'ensemble des applications f_k quand k décrit \mathbb{R}^* .

- Démontrer que G est stable pour la loi \circ et que f_1 est l'application identique de \mathbb{P} . (On pourra utiliser des résultats de A).
- Soit $\psi: \mathbb{R}^* \rightarrow G$
 $k \mapsto f_k$.
 - Démontrer que ψ est un isomorphisme de (\mathbb{R}^*, \times) sur (G, \circ) et préciser la structure de (G, \circ) .
 - Pour tout entier naturel n , on définit f_k^n par :

$$\begin{cases} f_k^0 & = & f_1 \\ f_k^n & = & f_k^{n-1} \circ f_k \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Démontrer que pour tout entier naturel n , $f_k^n = f_k^n$.

Partie C

Soit H la courbe dont une équation dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$2x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0.$$

1. Démontrer que H est une hyperbole admettant D_1 et D_2 comme asymptotes. Dessiner H . Indiquer les points d'intersection avec l'axe des ordonnées.
2. a. Soit M un point de coordonnées $(x; y)$, démontrer qu'il existe un couple de réels $(\alpha; \beta)$ unique, tel que M soit le barycentre du système pondéré : (A, α) (B, β) $(I, 1 - \alpha - \beta)$.
 b. Démontrer qu'un point M appartient à H , si et seulement si le couple $(\alpha; \beta)$ déterminé à la question précédente satisfait à $4\alpha\beta + 1 = 0$.
 c. Démontrer que H est globalement invariante par toute application f_k de G .

Partie D

1. Démontrer que toute application f_k de G , transforme tout point M de coordonnées $(x; y)$ en le point M' de coordonnées (x', y') définies par :

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{k} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \left(k - \frac{1}{k} \right) y - \frac{1}{2} \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(k - \frac{1}{k} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{k} \right) y \end{cases}$$

2. On appellera, par la suite, \mathcal{S} l'ensemble des couples d'entiers naturels $(X; Y)$ tels que

$$2X^2 - Y^2 + 2X + 1 = 0.$$

- a. Démontrer qu'un couple $(X; Y)$ appartient à \mathcal{S} et satisfait à $X \leq 3$ si et seulement si $(X; Y)$ est égal à $(0; 1)$ ou $(3; 5)$.
- b. Soit J et J' les points de coordonnées respectives $(0; 1)$ et $(3; 5)$.
 Démontrer qu'il existe un seul réel non nul k , tel que $f_k(J) = J'$.
 On notera g l'application f_k ainsi déterminée. Vérifier que g transforme tout point M de coordonnées $(x; y)$ en M' de coordonnées $(x'; y')$ définies par :

$$\begin{cases} x' &= 3x + 2y + 1 \\ y' &= 4x + 3y + 2 \end{cases}$$

3. On définit une application $\mathbb{N} \rightarrow P$ en posant :
 $n \mapsto Q_n$

$$Q_0 = J, \quad Q_n = g(Q_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On désigne par $(a_n; b_n)$ les coordonnées de Q_n dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $(a_n; b_n)$ appartient à \mathcal{S} .
- b. Calculer, pour tout entier naturel n , a_n et b_n en fonction de n .