

## ♣ Baccalauréat C Rouen juin 1981 ♣

### EXERCICE 1

$a$  et  $b$  étant deux entiers naturels non nuls, soit  $d$  leur P.G.C.D. et  $m$  leur P.P.C.M.  
Trouver tous les couples  $(a, b)$  vérifiant le système

$$\begin{cases} m & = & d^2 \\ m + d & = & 156 \\ a & \geq & b. \end{cases}$$

### EXERCICE 2

On pose, pour tout nombre complexe  $z$ ,

$$f(z) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6 - 2i)z + 3 - 2i.$$

1. Montrer que le polynôme  $f(z)$  possède une, et une seule, racine réelle  $z_0$  que l'on déterminera.  
En déduire une factorisation de  $f(z)$  sous la forme  $(z - z_0)Q(z)$  où  $Q(z)$  est un polynôme complexe du 3<sup>e</sup> degré que l'on précisera.
2. Vérifier que  $Q(i) = 0$ ; en déduire les solutions de l'équation

$$(z \in \mathbb{C}), \quad f(z) = 0.$$

3. On note  $P$  un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .  
 $z_1, z_2$  et  $z_3$  désignant les solutions de l'équation :  $Q(z) = 0$ , on appelle  $M_0, M_1, M_2$  et  $M_3$  les points de  $P$  d'affixes respectives  $z_0, z_1, z_2$  et  $z_3$ .  
Montrer que  $(M_1, M_2, M_3)$  est un triangle équilatéral dont le centre de gravité est  $M_0$  et faire la figure correspondante.

### PROBLÈME

#### Partie A

Soit  $a$  une constante réelle.  $F$  est l'endomorphisme du plan vectoriel défini par sa matrice dans la base  $(\vec{i}, \vec{i})$  :

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -a^2 & a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau de  $F$  et l'image de  $F$ . Calculer  $A^2$ .  
Les deux premiers résultats laissent-ils prévoir le troisième?
2.  $I$  étant la matrice unité d'ordre 2, calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $(aI + A)^n$ . La formule du binôme de Newton est-elle applicable? Expliquer pourquoi.

### Partie B

*Rappel* : on nomme suites réelles les applications de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ . Leur ensemble  $V$ , muni de l'addition des applications, et de la multiplication d'une application par un réel, constitue un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

$a$  désignant un réel non nul, soit  $W$  l'ensemble des suites réelles  $u$  telles que

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2au_{n+1} - a^2 u_n.$$

1. Vérifier que  $W$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , et que l'application  $\varphi$  donnant de  $u \in W$  l'image  $(u_0, u_1)$  est un isomorphisme de l'espace vectoriel  $W$  vers l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ . Définir une base  $\mathcal{B}$  de  $W$  dans laquelle  $u$  a pour coordonnées  $u_0$  et  $u_1$  dans cet ordre.
2. a. Évaluer  $u_n$  en fonction de  $n$  dans le cas où  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 1$ .  
b. Trouver toutes les suites géométriques de  $W$ .  
c. Montrer, sans les calculer, l'existence et l'unicité des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$(2) \quad \forall n \in W, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha a^n + \beta n a^{n-1}.$$

- d. Calculer  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $u_0$  et  $u_1$ .
3. À toute suite  $u$  élément de  $W$ , on associe la suite  $u' = f(u)$  définie par

$$(3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u'_n = u_{n+1}.$$

Vérifier que  $u'$  est élément de  $W$  et que  $f$  est un endomorphisme de  $W$ , dont on donnera la matrice  $M$  dans la base  $\mathcal{B}$  définie au B 1.

4. Quelle est, dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , la matrice de l'application  $g$  donnant de  $(u_0, u_1)$  l'image  $(u_1, u_2)$ ?  
Quelle est l'application qui donne de  $(u_0, u_1)$  l'image  $(u_n, u_{n+1})$ ?  
En utilisant A) 2., retrouver l'expression de  $u_n$  à partir de  $u_0, u_1$  et  $n$ .

### Partie C

Dans le plan affine  $P$ , soit un point fixe  $O$  et la suite de points  $M_0, M_1, \dots, M_n, \dots$  tels que

$$(4) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \overrightarrow{OM_{n+2}} = 2a \overrightarrow{OM_{n+1}} - a^2 \overrightarrow{OM_n}.$$

1. On suppose  $a \neq 1$ . Soit  $G_{n+1}$  le barycentre de  $M_{n+1}$  et de  $M_n$  affectés respectivement des coefficients 1 et  $-a$ . Vérifier que  $G_{n+1}$  et  $G_{n+2}$  sont alignés avec  $O$ . Comment  $G_n$  se déduit-il simplement de  $G_{n-1}$ ?
2. Dans tout ce qui suit  $a = \frac{1}{2}$ ,  $M_0$  et  $M_1$  ont pour coordonnées respectives  $(2; 0)$  et  $(1; 1)$  dans un repère d'origine  $O$ .  
Placer sur un graphique (axes perpendiculaires, unité : 1 dm) les points  $M_0, M_1, G_1$  et résumer très sommairement la construction par laquelle chacun des points  $G_2, M_2$  se déduit des précédents.

Calculer, en fonction de  $n$ , les coordonnées  $x_n$  et  $y_n$  de  $M_n$ .

Les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont-elles convergentes?

$M_n$  a-t-il une position limite pour  $n$  infini?

3. Soit dans le même plan P rapporté au repère précédent, la courbe  $\mathcal{C}$  de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2^{1-t} \\ y = t \cdot 2^{1-t} \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Établir qu'il existe un point de  $\mathcal{C}$  où la tangente est parallèle à la droite  $(OM_0)$ .

Montrer que son abscisse vaut  $\frac{2}{e}$ ; quelle est son ordonnée?

Placer la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M_0$ . Établir l'existence d'une tangente en  $O$  à  $\mathcal{C}$ .

4. Former une équation cartésienne de la courbe  $\mathcal{C}$ .
5. Au moyen d'une intégration par parties, calculer une primitive de la fonction  $x \mapsto x \log x$ .
- En déduire l'aire de  $\mathcal{E}$ , partie du plan P délimitée par le segment  $OM_0$  et l'arc  $OM_0$  de  $\mathcal{C}$ .