

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat C juin 1982 Rouen ☞

EXERCICE 1

4 points

1. Résoudre l'équation d'inconnue  $(x ; y)$  élément de  $\mathbb{Z}^2$  :

$$661x - 991y = 1.$$

On pourra remarquer que

$$1982 = 2 \times 991 \quad \text{et} \quad 1983 = 3 \times 661.$$

2. On considère deux suites arithmétiques  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par

$$\begin{cases} u_0 = 3, & v_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 991, & v_{n+1} = v_n + 661 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Indiquer tous les couples  $(p ; q)$ , avec  $p$  et  $q$  entiers naturels inférieurs à 2000, tels que  $u_p = v_q$ .

EXERCICE 2

4 points

Soit  $\mathcal{V}$  un espace vectoriel réel, de dimension 2 ou 3,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $\mathcal{V}$ , chacun distinct de  $\{0\}$  et de  $\mathcal{V}$ .

On désigne par

$p$  la projection vectorielle sur  $\mathcal{A}$ , de direction  $\mathcal{B}$

$q$  la projection vectorielle sur  $\mathcal{B}$ , de direction  $\mathcal{A}$ ,

$e$  l'identité dans  $\mathcal{V}$ .

On rappelle que l'ensemble  $\mathcal{L}(\mathcal{V})$  des endomorphismes de  $\mathcal{V}$  est un espace vectoriel réel pour l'addition des endomorphismes et la multiplication d'un endomorphisme par un réel.

Soit  $F = \{ap + bq ; (a ; b) \in \mathbb{R}^2\}$ .

1. Démontrer que  $F$  est un espace vectoriel réel. Démontrer que  $(p ; q)$  est une base de  $F$ .
2. Démontrer que  $F$  est stable pour la composition des endomorphismes.
3. Soit  $\varphi$  un élément de  $F$ . On pose  $\varphi^0 = e$  et, pour tout  $n$  élément de  $\mathbb{N}$ ,  $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n$ . Calculer  $\varphi^n$ .
4. Déterminer l'ensemble des projections vectorielles éléments de  $F$ . Donner leurs éléments caractéristiques.

PROBLÈME

12 points

Le plan  $P$  affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ . On désigne par  $P^*$  le plan  $P$  privé du point  $O$ .

Un point quelconque  $M$  ayant pour coordonnées  $x$  et  $y$  par rapport au repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  a pour affixe le nombre complexe  $z = x + iy$ ; on note  $\bar{z}$  le conjugué de  $z$ ; on désigne par  $[r, \theta]$  le nombre complexe qui s'écrit  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$  avec  $r$  élément de  $\mathbb{R}_+$  et  $\theta$  élément de  $\mathbb{R}$ .

### Partie A

Étant donné un nombre complexe  $a$  non nul, on considère l'application  $\varphi_a$  de  $\mathbb{P}^*$  dans  $\mathbb{P}^*$  qui à chaque point  $M$  d'affixe  $z$  fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{a}{z}$ .

1. Cette application est-elle bijective?

Déterminer suivant les valeurs de  $a$  l'ensemble des points invariants par  $\varphi_a$ .

2. Déterminer la nature de l'application composée  $\varphi_b \circ \varphi_a$ ,  $a$  et  $b$  étant des nombres complexes non nuls.

Montrer que  $\varphi_a \circ \varphi_a$  est la restriction à  $\mathbb{P}^*$  d'une isométrie de  $\mathbb{P}$  dont on déterminera la nature et les éléments remarquables en fonction de l'argument de  $a$ .

Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier  $a$  pour que  $\varphi_a$  soit involutive?

### Partie B

Dans cette partie,  $a$  est un réel strictement positif.

1. En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :

$\varphi_a$  est-elle bijective?

Quel est l'ensemble des points invariants par  $\varphi_a$ ?

$b$  étant aussi un réel strictement positif, quelle est la nature de  $\varphi_b \circ \varphi_a$ ?

$\varphi_a$  est-elle involutive?

2.  $M'$  étant l'image de  $M$  par l'application  $\varphi_a$  calculer les coordonnées  $x'$  et  $y'$  de  $M'$  en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  de  $M$ , puis les coordonnées  $x$  et  $y$  de  $M$  en fonction des coordonnées  $x'$  et  $y'$  de  $M'$ .  $z'$  étant l'affixe de  $M'$ , on pose  $z' = [r', \theta']$ , calculer  $r'$  et  $\theta'$  en fonction de  $r$  et  $\theta$ .

Dans la suite du problème, on se servira, suivant les questions, soit de la relation  $z' = \frac{a}{z}$ , soit des relations donnant  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ , soit celles donnant  $x$  et  $y$  en fonction de  $x'$  et  $y'$ , soit de celles donnant  $r'$  et  $\theta'$  en fonction de  $r$  et  $\theta$ .

3. Montrer que les points  $O$ ,  $M$  et  $M' = \varphi_a(M)$  sont alignés.

Soit une droite  $(D)$  passant par  $O$ ; déterminer l'image par  $\varphi_a$  de  $(D)$  privée de  $O$ .

4. Soit un cercle  $(C)$  passant par  $O$  et centré sur l'axe des abscisses en un point d'abscisse  $c$ .

Déterminer l'image par  $\varphi_a$  de  $(C)$  privé de  $O$ . En déduire l'image par  $\varphi_a$  d'une droite parallèle à l'axe des coordonnées et distincte de celui-ci.

### Partie C

Soit  $(H)$  la courbe d'équation

$$x^2 - y^2 + 2x = 0$$

par rapport au repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Montrer que (H) est une hyperbole dont on indiquera centre, axes de symétrie, sommets, foyers, asymptotes. Dessiner (H) en prenant 4 cm pour unité sur chacun des deux axes.
2. Montrer que (H) est l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z = [r, \theta]$  tels que  $r = f(\theta)$  ou  $f(\theta) = \frac{-2\cos\theta}{\cos 2\theta}$ ,  $\theta$  décrivant un sous-ensemble de  $[0; 2\pi]$ .  
En étudiant le signe de  $f(\theta)$  suivant les valeurs de  $\theta$ , vérifier que (H) se trouve située dans trois régions du plan limitées par des demi-droites d'origine O; sur la figure, on hachurera les autres régions.
3. À partir de cette question, on suppose  $a = 1$ .  
Soit  $(\Gamma^*)$  l'image par  $\varphi_1$  de (H) privée de O et soit  $(\Gamma) = (\Gamma^*) \cup \{O\}$ .  
Montrer que  $(\Gamma)$  est l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z = [r, \theta]$  tels que  $r = g(\theta)$  avec  $\theta \in [0, 2\pi]$ ; calculer  $g(\theta)$ .
4. Montrer que  $(\Gamma)$  se trouve dans les mêmes régions que celles définies au 2. et qui contiennent (H).  
Montrer que  $(\Gamma)$  admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.  
Placer les points invariants de (H) et calculer leurs coordonnées.
5. Soit A le point de (H) appartenant à l'axe des abscisses et dont l'abscisse est strictement négative.  
Déterminer  $A' = \varphi_1(A)$ .  
Soit  $(\Delta)$  la tangente en A à (H); déterminer l'image  $(\Delta')$  de  $(\Delta)$  par  $\varphi_1$  en utilisant la question B 4.  
Construire  $(\Delta')$ .
6. Montrer qu'une équation cartésienne de  $(\Gamma)$  est

$$y^2 = x^2 \left( \frac{1+2x}{1-2x} \right).$$

Soit  $(\Gamma_1)$  l'ensemble des points du plan P de coordonnées  $x$  et  $y$  telles que  $y = x\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ .

En étudiant la fonction

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

et en utilisant les questions précédentes, construire  $(\Gamma_1)$  sur le même graphique que (H), puis en déduire  $(\Gamma)$ . Préciser les tangentes en O et en  $A'$  à  $(\Gamma_1)$ . Vérifier que  $(\Gamma)$  et  $(\Delta')$  ont la même tangente en  $A'$ .