

❧ Baccalauréat C Rouen juin 1984 ❧

EXERCICE 1

5 POINTS

Soit $z_0 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$;

1. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.
- a. Montrer que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et en déduire que α et β sont solutions de l'équation

$$(1) \quad X^2 + X - 1 = 0.$$

- b. Déterminer α en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$.
- c. Résoudre l'équation (1) et en déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.
2. On appelle A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'affixes respectives $1, z_0, z_0^2, z_0^3, z_0^4$ dans le plan affine rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- a. Soit H le point d'intersection de la droite A_1A_4 avec l'axe (O, \vec{u}) .

Montrer que $\overline{OH} = \cos \frac{2\pi}{5}$.

- b. Soit C le cercle de centre O d'affixe $-\frac{1}{2}$ passant par B d'affixe i . Ce cercle coupe l'axe (O, \vec{u}) en M et N. (On appellera M le point d'abscisse positive).

Montrer que $\overline{OM} = \alpha$, $\overline{ON} = \beta$ et que H est le milieu de OM.

- c. En déduire une construction simple d'un pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet A_0 .

EXERCICE 2

5 POINTS

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (E) l'ensemble des point du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation

$$15x^2 + 13y^2 - 2xy\sqrt{3} = 768$$

et soit f l'application de P dans P qui à un point M de coordonnées $(x; y)$ associe M' de coordonnées $(x'; y')$ tel que

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{4}(x + \sqrt{3}y) \\ y' &= \frac{1}{4}(-\sqrt{3}x + y) \end{cases}$$

1. Montrer que f est une similitude plane directe que l'on caractérisera. Déterminer f^{-1} .

2. Déterminer une équation de $(f(E))$ et montrer que $(f(E))$ est une ellipse dont on précisera les sommets, les foyers, et l'excentricité.
3. En déduire que (E) est l'ensemble des points M du plan tels que

$$MF_1 + MF'_1 = 16$$

où F_1 et F'_1 sont deux points que l'on déterminera.

PROBLÈME**10 POINTS****Partie A**

On considère l'équation différentielle :

$$y'(x) - y(x) = x + 2 \quad (E).$$

1. Déterminer une fonction affine a solution de (E) .
2. Montrer que si y est solution de (E) , alors $y - a$ est solution d'une équation différentielle homogène du premier ordre.
La résoudre.
3. Déterminer toutes les solutions de (E) .

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^x - x - 3.$$

1. Étudier les variations de la fonction f .
2. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - a. Montrer que (C) admet une asymptote D dont on précisera l'équation.
Préciser la position de la courbe (C) par rapport à cette asymptote.
 - b. Construire (C) (on prendra pour unité 2 cm).
3. Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine limité par C , D et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ avec $a < 0$.
Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.
4. Soit f_1 la restriction de f à l'intervalle $I = [0; +\infty[$.
 - a. Montrer que f_1 est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_1 .
Construire sa courbe représentative C' dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - c. Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une solution unique que l'on encadrera par deux entiers consécutifs.

Partie C

Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \ln(x + 3).$$

1. Étudier les variations de g et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé (on prendra pour unité 2 cm).
2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \ln(u_n + 3) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- a. En utilisant la croissance de g , étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
 - b. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.
 - c. En déduire que cette suite est convergente. Soit ℓ sa limite.
3. Soit (v_n) la suite définie par

$$\begin{cases} v_0 &= 2 \\ v_{n+1} &= \ln(v_n + 3) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- a. En utilisant la croissance de g , étudier le sens de variation de la suite (v_n) .
 - b. Montrer que la suite (v_n) est minorée par 1.
 - c. En déduire que cette suite est convergente. Soit ℓ' sa limite.
4. Montrer que $\ell = \ell'$.
 5. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \frac{1}{t+3} dt$.
 - b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{4^n}$.
 - c. En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.