Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Rouen septembre 1975 ∾

EXERCICE 1

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^5 x \cos x + \cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2

1. Donner une factorisation du polynôme

$$x^2 + \dot{6}x - \dot{91}$$

dans l'un ou l'autre des anneaux $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ puis $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$

2. Résoudre l'équation :

$$x^2 + \dot{6}x - \dot{91} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$$

3. Résoudre l'équation :

$$x^2 + \dot{6}x - \dot{91} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$$

PROBLÈME

Partie A

Dans le plan vectoriel euclidien (P) orienté rapporté à la base orthonormé $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère l'endomorphisme F dont la matrice dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les coordonnées $\left(x' ; y'\right)$ du vecteur $\overrightarrow{v'} = F\left(\overrightarrow{v}\right)$ connaissant les coordonnées $(x ; y)$ de $\overrightarrow{v}$.
2. F est-il un automorphisme de (P) ? F est-il involutif ? Expliquer géométriquement le résultat obtenu.
3. Étudier l'image par F d'une droite vectorielle de (P).
   Montrer que F conserve globalement deux droites vectorielles que l'on déterminera.

Partie B

Soit r la rotation dont l'angle a pour détermination $+\dfrac{\pi}{2}$.
Soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle de vecteur directeur $\left\{\overrightarrow{\imath}\right\}$.
Soit t la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par $\left(\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\imath}\right)$.
Soit h l'homothétie de rapport 2 et h' l'homothétie de rapport $\sqrt{3}$.

1. Déterminer par sa matrice l'application linéaire :

$$\mathscr{A} = h' \circ ((h \circ s) + r)$$

2. Même question pour $\mathscr{A}' = h' \circ s \circ (h + t)$.
Comparer $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$, F.

Partie C

On considère le plan affine $(\mathscr{P})$ associé à (P), rapporté au repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.
M est le point de $(\mathscr{P})$ tel que $\overrightarrow{\text{O}M} = \overrightarrow{v}$.
M' est le point de $(\mathscr{P})$ tel que $\overrightarrow{\text{O}M'} = \overrightarrow{v'}$.
Les vecteurs v et v' ont été définis dans A 1.

1. On appelle f l'application de $(\mathscr{P})$ dans $(\mathscr{P})$ telle que : $f(M) = M'$.
Si x et y sont les coordonnées de M, quelles sont les coordonnées de M' ?
f est-elle bijective ? Existe-t-il des points invariants par f ?
Former une équation de la transformée par f d'une droite D d'équation $ux+vy+w = 0$, $(u,~v,~w) \in \mathbb{R}^3$, $(u~;~v) \neq (0~;~0)$.
Existe-t-il des droites globalement invariantes ? Si oui, quelles sont leurs équations ?

2. On appelle z l'affixe de M et $z' = g(z)$ l'affixe de M' dans le plan complexe de repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.
Montrer qu'il existe entre $z, \overline{z}$ (conjugué de z) et z' une relation de la forme $z' = az+b\overline{z}$ où a et b sont des nombres complexes que l'on précisera.