

♣ Baccalauréat C Rouen septembre 1976 ♣

EXERCICE 1

On dispose d'un sac contenant 4 boules noires et 4 boules blanches, toutes identiques au toucher.

On tire au hasard et sans remise, et l'on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule blanche.

Le nombre de boules noires que l'on a du tirer est une variable aléatoire X .

On demande d'établir la loi de probabilité de X .

Quelle est la probabilité pour que le nombre de boules noires que l'on a du tirer soit inférieur ou égal à 2?

Calculer l'espérance et la variance de X .

EXERCICE 2

Dans le plan affine \mathcal{P} rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne l'application affine f , qui au point $M(x; y)$ fait correspondre le point $M'(x'; y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = -x - y - 2 \end{cases}$$

1. Montrer que l'endomorphisme φ associé à f est involutif et déterminer cet endomorphisme.
2. f est-elle bijective? f est-elle involutive? f admet-elle des points invariants?
3. Montrer qu'il existe une droite du plan affine globalement invariante par f .

PROBLÈME

Partie A

Une suite numérique (U_n) est définie par son premier terme U_1 et la relation de récurrence

$$U_{n+1} = \frac{6 + U_n}{2 + U_n}$$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs a et b de U_1 ($a < b$) pour lesquelles la suite est constante.
2. Montrer que si $U_1 \neq a$ et $U_1 \neq b$, il en est de même de U_n . Dans ces conditions, calculer :

$$\frac{U_{n+1} - a}{U_{n+1} - b} \text{ en fonction de } \frac{U_n - a}{U_n - b}$$

3. En déduire que la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{U_n - a}{U_n - b}$ est une suite géométrique.
Calculer la limite de $|V_n|$ quand n tend vers plus l'infini; en déduire celle de U_n .

Partie B

On désigne par f , la fonction numérique de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{x+6}{x+2}$$

1. Variations de f ; courbe représentative (\mathcal{C}) dans un repère orthonormé (unité le cm),
2. Retrouver à l'aide de la fonction f les réels a et b de la question 1. de A.
3. Déterminer l'équation de (\mathcal{C}) rapportée à ses asymptotes; préciser la nature de (\mathcal{C}), ses sommets, ses foyers, ses directrices ainsi que l'excentricité.
4. Déterminer les points de (\mathcal{C}) dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs.
5. Trouver l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine plan défini par :

$$\lambda \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq f(x) \quad \lambda \text{ satisfaisant à } -2 < \lambda < 0.$$

$\mathcal{A}(\lambda)$ a-t-elle une limite quand λ tend vers -2 ?

Partie C

À tout nombre complexe z , on associe quand cela est possible le nombre complexe z' tel que

$$z' = \frac{z+6}{z+2}.$$

On désigne dans le plan complexe, par M et M' les images de z et de z' . On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y, x', y' réels).

1. Calculer x' et y' en fonction de x et y . Préciser l'ensemble des points M qui n'ont pas d'image.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels z' est un réel négatif.
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels l'argument de z' est $\frac{\pi}{2} \pmod{2k\pi}$.
4. Déterminer l'ensemble \mathcal{C}_k des points M du plan pour lesquels M' décrit la droite D_k d'équation $y = k$.
Reconnaître \mathcal{C}_k . Montrer que lorsque k décrit \mathbb{R}^* , \mathcal{C}_k passe par un point fixe et reste tangente à une droite fixe.