∽ Baccalauréat C Rouen septembre 1977 ∾

EXERCICE 1 **2 POINTS**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$1 + \text{Log}\,(x+3) > \text{Log}\left(x^2 + 2x - 3\right)$$

Log désignant la fonction logarithme népérien.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Un clochard suit une route indéfiniment bordée d'arbres alignés, distants les uns des autres de 10 mètres. Il décide au cours de sa promenade, de jouer au jeu suivant : devant chaque arbre, il lance son unique pièce de monnaie; si c'est pile, il continue dans la même direction, si c'est face, il rebrousse chemin, jusqu'à l'arbre voisin. Au bout de 6 déplacements, il s'endort au pied de l'arbre où il est.
On appelle x la distance arithmétique, en mètres, entre l'arbre devant lequel il commence son jeu et l'arbre d'arrivée.
Quelles sont les valeurs possibles prises par x? Dresser la loi de probabilité de cette variable aléatoire sachant que la pièce n'est pas truquée.
Quelle est la distance ayant la plus grande probabilité?
Calculer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.

PROBLÈME **14 POINTS**

Partie A

Soit P un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. On considère l'endomorphisme φ de P ayant pour matrice dans la base $\mathscr{B}$

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$$

1. Trouver les nombres réels λ tels qu'il existe au moins un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul de P vérifiant $\varphi(\overrightarrow{u}) = \lambda.\overrightarrow{u}$.

   Déterminer l'ensemble El des vecteurs $\overrightarrow{v}$ et l'ensemble E2 des vecteurs $\overrightarrow{w}$ qui vérifient respectivement $\varphi(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ et $\varphi(\overrightarrow{w}) = 2\overrightarrow{w}$.
2. Soit les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = 3\overrightarrow{\imath} - 4\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2} = -2\overrightarrow{\imath} + 3\overrightarrow{\jmath}$.

   Après avoir vérifié que $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ est une base de P, que l'on notera $\mathscr{B}'$, et précisé si elle est orthonormée ou non, établir la matrice B de l'application φ dans cette base $\mathscr{B}'$
3. Soit α l'endomorphisme de P tel que $\alpha\left(\overrightarrow{\imath}\right) = e_1$ et $\alpha\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = e_2$.

   Notant R la matrice de l'application α dans la base $\mathscr{B}$, déterminer R ainsi que la matrice inverse R^{-1}de R.

   Vérifier que $A = R \cdot B \cdot R^{-1}$.

Partie B

Soit $\mathscr{M}$ le plan affine euclidien, de plan vectoriel euclidien associé P, rapporté au repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
M_0 étant un point donné du plan $\mathscr{M}$ on considère la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points du plan définie de la façon suivante :
notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(x_n~;~y_n\right)$ les coordonnées du point M_n dans le repère $\mathscr{R}$, alors

$$\text{quel que soit } n \in \mathbb{N} \quad \left\{\begin{array}{l c l} x_n & = & -7x_{n-1} - 6y_{n-1}\\ y_n & = & 12x_{n-1} + 10y_{n-1}\end{array}\right.$$

1. Démontrer que selon la position de M_0, les points M_n sont ou bien tous confondus, ou bien tous distincts et alignés sur une droite affine que l'on déterminera.
2. La distance du point M au point O a-t-elle pour limite l'infini lorsque n tend vers l'infini ?
3. Calculer la limite lorsque n tend vers l'infini de

$$\frac{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}{x_n^2 + y_n^2}$$

Partie C

Soit a un nombre réel non nul. On note S l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, et satisfaisant pour tout $x \in \mathbb{R}$ à la condition $f'(x) = af(x)$.

1. Montrer que l'application f_a définie par $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$ appartient à S.
2. f étant un élément quelconque de S, quelle est l'application dérivée de l'application $h = \dfrac{f}{f_a}$?

   En déduire que f est de la forme $k \cdot f_a$ où k est un nombre réel.

   Trouver toutes les applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, satisfaisant pour tout $x \in \mathbb{R}$ aux deux conditions

$$\left\{\begin{array}{l c l} f'(x) & = & -7f(x) - 6g(x)\\ g'(x) & = & 12f(x) + 10g(x).\end{array}\right.$$