

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Rouen septembre 1983 ∞

EXERCICE 1

Soit \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes, i étant le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On considère l'application f de $\mathbb{C} - \{1 + 3i\}$ dans \mathbb{C} définie par la relation

$$f(z) = \frac{z + 5 - i}{z - 1 - 3i}$$

On appelle A et B les points d'affixe $-5 + i$ et $1 + 3i$ respectivement.

Dans un plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application F qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point $F(M) = M'$ d'affixe $f(z)$.

1. Déterminer les points invariants par F .
2. a. Déterminer analytiquement l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que M' appartienne à (O, \vec{i}) , axe des réels.
Déterminer analytiquement l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que M' appartienne à (O, \vec{j}) , axe des imaginaires purs.
Déterminer analytiquement l'ensemble E_3 des points M d'affixe z tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.
- b. Faire une figure claire représentant ces trois ensembles E_1 , E_2 et E_3 et retrouver ces résultats par des considérations géométriques.

EXERCICE 2

Soit E l'espace orienté, muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'application affine de E dans E, qui à tout point M de E de coordonnées $(x; y; z)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'; y'; z')$ définies par :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}+2}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}-2}{4}z \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{2}z \\ z' = \frac{\sqrt{2}-2}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}+2}{4}z. \end{cases}$$

1. a. Montrer que f est une rotation de E, dont l'axe D est la droite de vecteur directeur $(\vec{k} - \vec{i})$ passant par O.
- b. Soit les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{k} - \vec{i}), \vec{e}_2 = \vec{j}, \vec{e}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k}).$$

Montrer que $\mathcal{R}' = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est un repère orthonormé direct de E.

- c. Montrer que les plans orthogonaux à D ont pour vecteurs directeurs \vec{e}_2 et \vec{e}_3 . On oriente ces plans par la base (\vec{e}_2, \vec{e}_3) . Déterminer une mesure de l'angle de la rotation f .
2. Donner l'expression analytique de f dans \mathcal{R}' .

PROBLÈME**Partie A Question préliminaire**

Soit g la fonction polynôme définie dans \mathbb{R} par $g(x) = x^2 + x - m$, où m est un paramètre réel non nul.

- Résoudre l'équation $g(x) = 0$.
- Lorsque cette équation a deux racines réelles distinctes x' et x'' ($x' < x''$), placer -1 et 0 par rapport à x' et x'' . Pour cela on pourra étudier le signe de $g(0)$ et $g(-1)$ et démontrer que :
 - si $m > 0$, 0 et -1 sont entre x' et x'' et
 - si $m < 0$, les racines x' et x'' sont négatives et situées entre -1 et 0 .

Les parties B, C, D sont dans une large mesure indépendantes. Dans ces trois parties on appelle P un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

Soit $m > 0$. Soit f_m l'application définie sur $\mathbb{R}^* - \{-1\}$ par

$$f_m(x) = x + 1 + m \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$$

et \mathcal{C}_m la courbe représentative de f_m dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Donner les limites de f_m aux bornes de son ensemble de définition.
- Étudier les variations de f_m .
- Étudier les branches infinies de \mathcal{C}_m . Étudier complètement la position des courbes \mathcal{C}_m par rapport à leur asymptote oblique D .
- Démontrer que toutes les courbes \mathcal{C}_m passent par un point fixe I. Démontrer que I est centre de symétrie de chaque courbe \mathcal{C}_m ?
- Construire \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_1 dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra comme unité 2 cm. (On ne précisera pas les points d'intersection avec les axes ni les points d'inflexion).
- Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$ et soit $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie de plan limitée par les courbes \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_1 et les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 1$.
Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$. Quelle est la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0_+ ?

Partie C

Soit $t \in \mathbb{R}^*$ et g_t l'application affine de P dans P telle que

$$g_t : M(x; y) \mapsto M'(x'; y') \begin{cases} x' = x \\ y' = (1-t)x + ty + 1 - t. \end{cases}$$

1. Soit $G = \{g_t, t \in \mathbb{R}^*\}$. Soit φ l'application de \mathbb{R}^* dans G définie par :
 $\forall t \in \mathbb{R}^*, \varphi(t) = g_t$.
 Démontrer que φ est un isomorphisme de (\mathbb{R}^*, \times) dans (G, \circ) . Quelle est la structure de (G, \circ) ? (On note \circ la composition des applications).
2. Quel est l'ensemble des points invariants par g_t ?
3. Soit H l'image de M par la projection sur la droite D (dont une équation est $y = x + 1$), parallèlement à la droite vectorielle engendrée par \vec{j} .
 Exprimer $\overrightarrow{HM'}$ en fonction de \overrightarrow{HM} .
4. Soit $\mathcal{F} = \{\mathcal{C}_m, m > 0\}$, où \mathcal{C}_m est la courbe définie en B.
 - a. Démontrer que, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ l'image par g_t , d'un élément de \mathcal{F} est un élément de \mathcal{F} .
 - b. Déterminer le réel t tel que l'image de \mathcal{C}_2 par g_t , soit \mathcal{C}_1 .

Partie D

Soit M un point mobile dans le plan P dont les coordonnées à la date t ($t \in \mathbb{R}_+^*$) sont

$$\begin{cases} x = \frac{1}{e^t - 1} \\ y = \frac{1}{e^t - 1} + 2t + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la trajectoire γ du point M est contenue dans la courbe \mathcal{C}_2 .
2. Déterminer l'image de l'intervalle $]0; +\infty[$ par la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$. En déduire la trajectoire γ . Préciser le sens de parcours de M.