Baccalauréat C (oral) Rouen juin 1968

Exercice 1

On considère les nombres complexes

$$z = \cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi$$

$$z' = \cos 2\varphi' + \mathrm{i}\sin 2\varphi',$$

où φ et φ' sont tels que

$$O < \varphi < \pi \quad \text{et} \quad 0 < \varphi' < \pi.$$

Calculer le module et l'argument du nombre complexe

$$w = \frac{1-z}{1-z'}.$$

Exercice 2

Étant donné un cercle fixe (Γ) et une droite fixe (D) tangente à ce cercle, déterminer l'ensemble des centres des cercles (C) tangents à (D) et orthogonaux au cercle (Γ).

Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

Exercice 1

Soit z le nombre complexe de module 1 et d'argument θ (mod. 2π).
Déterminer le module du produit

$$(z+1)(z-\mathrm{i}).$$

Exercice 2

On donne deux cercles, (C) et (C′), de même rayon, R, tangents entre eux.
Déterminer le centre d'un cercle de rayon $2R$ orthogonal au cercle (C) et coupant le cercle (C′) en deux points qui soient, sur (C′), diamétralement opposés.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1) \qquad y'' + y = 2\cos x.$$

1. **1.** Montrer qu'il est possible de déterminer les constantes a et b de telle façon que la fonction

$$y = ax\sin(bx)$$

soit solution de l'équation (1).

2. Les constantes a et b ayant les valeurs déterminées au 1, on pose

$$y = ax\sin(bx) + z.$$

Former l'équation à laquelle satisfont z et z''.
En déduire la solution générale de l'équation (1).

Exercice 2

On considère l'ellipse (E) ayant pour équation, par rapport à un repère orthonormé, $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Démontrer que, $M(x\,;\,y)$ étant un point quelconque de cette ellipse et T et T$'$ étant les points où la tangente en M coupe les tangentes aux sommets, B et B$'$, de son petit axe, on a la relation

$$\overline{\mathrm{BT}} \times \overline{\mathrm{BT'}} = a^2.$$