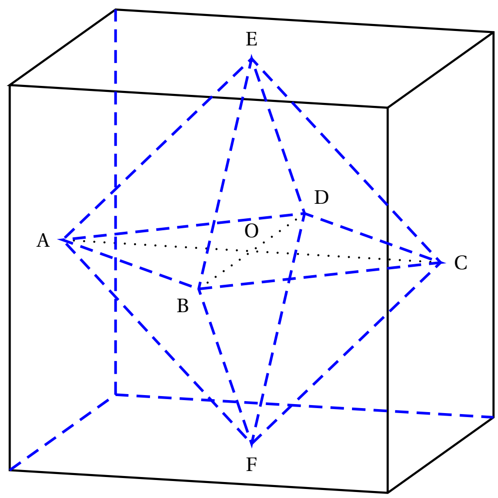
∽ Baccalauréat Nouvelle Calédonie 28 novembre 2017 ∾
Sciences et technologies du design et des arts appliqués

EXERCICE 1 **8 points**

Dans les jeux de rôles, on utilise différents types de dés en plus du classique dé à six faces afin d'obtenir des résultats différents. Les polyèdres réguliers, connus aussi sous le nom de « solides de Platon », permettent d'obtenir des dés équiprobables, chaque face ayant la même probabilité de sortir à chaque tirage. Par exemple, un dé à huit faces a la forme d'un octaèdre régulier.

Partie A : Étude de l'octaèdre régulier

Un octaèdre régulier peut-être obtenu à partir d'un cube en prenant pour sommets de l'octaèdre les centres des faces du cube.
On a représenté ci-dessous, en perspective parallèle, un octaèdre régulier ABCDEF inscrit dans un cube dont l'arête mesure 2 cm.
Le point O est le point d'intersection des diagonales du quadrilatère ABCD.



On admet que $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},\,\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)$ est un repère orthonormal de l'espace.

1. **a.** Donner les coordonnées des sommets de l'octaèdre régulier ABCDEF dans le repère orthonormal de l'espace $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},\,\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)$.
   b. Que peut-on dire de la sphère de centre O passant par A ?
   c. Calculer la longueur AE de l'arête de l'octaèdre régulier ABCDEF.
2. Les droites (AE) et (DF) sont-elles orthogonales ? Justifier.
3. Calculer le volume de l'octaèdre régulier ABCDEF. *On arrondira le résultat au* cm^3.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule :
   $V = \dfrac{B \times h}{3}$ **où B est l'aire de la base de la pyramide et h la hauteur relative à cette base.**

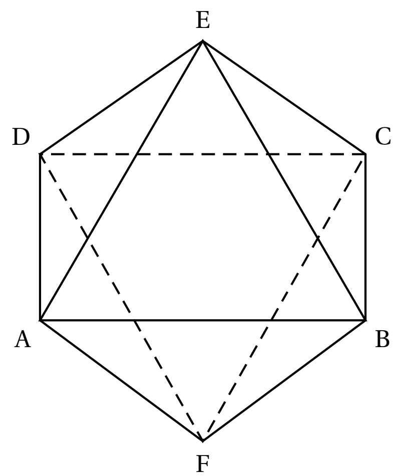
Partie B : Représentation de l'octaèdre régulier en perspective centrale

On souhaite représenter l'octaèdre régulier ABCDEF en perspective centrale.
On appelle a, b, c, ... les images des points A, B, C, ... Les segments $[ab]$ et $[bc]$ sont tracés sur l'**annexe 1 à rendre avec la copie**.
Le plan (ABC) est horizontal.
Les segments [AB] et [OE] sont dans des plans frontaux.
On complètera au fur et à mesure la figure de l'annexe 1 *à rendre avec la copie.*

1. **a.** Construire le point d.
   b. Construire le point e.
   c. Terminer la construction de l'octaèdre $abcdef$.
2. Comment s'appelle le point d'intersection des droites (ad) et (be) ?

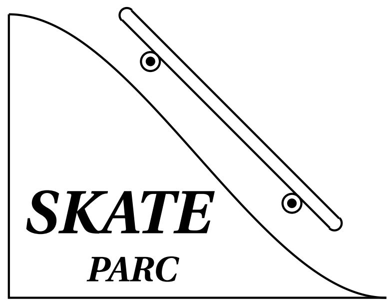
Partie C : Invariant par rotation

1. L'octaèdre ABCDEF est invariant par une rotation d'axe (EF).
   Quel est l'angle minimal non nul de cette rotation ?
2. On a représenté ci-dessous l'octaèdre régulier ABCDEF en perspective parallèle.
   La face ABE est dans un plan frontal.
   Donner sans justification une rotation d'axe différent de [EF] et d'angle non nul par laquelle l'octaèdre est invariant. On précisera l'axe et l'angle de cette rotation.



EXERCICE 2 **5 points**

La mairie d'un village fait appel à un graphiste pour le logo du nouveau skate-parc. Le graphiste propose le modèle suivant :



Partie A : Étude de la rampe de skateboard

Afin d'étudier au mieux ce logo, on se place dans le repère orthonormal (O, I, J) de l'**annexe 2 à rendre avec la copie**. Dans ce repère, la rampe de skateboard est constituée du segment horizontal [OA], du segment vertical [OB] et de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f reliant le point A au point B.
Les points A et B ont pour coordonnées respectives A(4 ; 0) et B(0 ; 3).
Les tangentes à $\mathscr{C}$ en A et B sont horizontales.
La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des nombres réels à déterminer.

1. Donner l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f.
2. **a.** Écrire un système d'équations vérifié par les nombres réels a, b, c et d.

   b. Résoudre ce système d'équations.
3. On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$f(x) = \frac{3}{32}x^3 - \frac{18}{32}x^2 + 3.$$

4. **a.** Compléter le tableau de valeurs de l'**annexe 2 à rendre avec la copie**.
   On arrondira les résultats au dixième.

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère de l'**annexe 2 à rendre avec la copie**.

Partie B : Étude de quelques éléments de la planche de skateboard

1. Les roues de la planche de skateboard sont constituées de deux cercles de centres respectifs C(1,5 ; 2,5) et D(3 ; 1) et de même rayon OJ.

   a. Donner une équation cartésienne du cercle de centre C et de rayon 0,1.

   b. Donner une représentation paramétrique du cercle de centre D et de rayon 0,1.
2. La planche est constituée de deux segments parallèles à la droite (CD) reliés par deux demi-cercles. On appelle E le point d'abscisse 2 situé sur la rampe de skateboard.

   a. Calculer l'ordonnée du point E.

   b. La tangente à la rampe au point E est-elle parallèle à la planche de skateboard ?

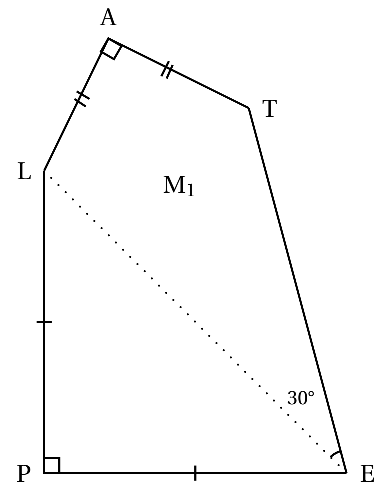
EXERCICE 3 **7 points**

Dans cet exercice, les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.
L'unité de longueur est le centimètre.

Partie A : Étude de la maille *Pétale* M_1 représentée ci-contre

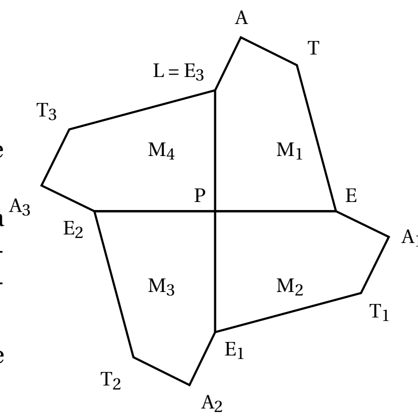
La maille *Pétale* M_1 est constituée :

- d'un triangle PLE rectangle et isocèle en P tel que PE = PL = 4.
- d'un triangle LET tel que tel que $\widehat{LET} = 30°$ et TE = 5.
- d'un triangle LAT rectangle et isocèle en A.

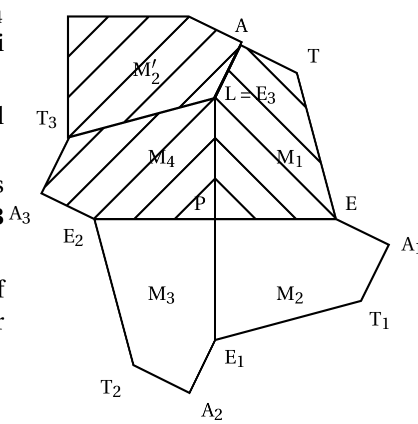


1. Calculer la longueur LE.
2. En appliquant la formule d'Al-Kashi dans le triangle LET, calculer la longueur LT.
   On arrondira le résultat au dixième.
3. Calculer la longueur TA.
   On arrondira le résultat au dixième.

Partie B : Motif *Décor* et vitrail

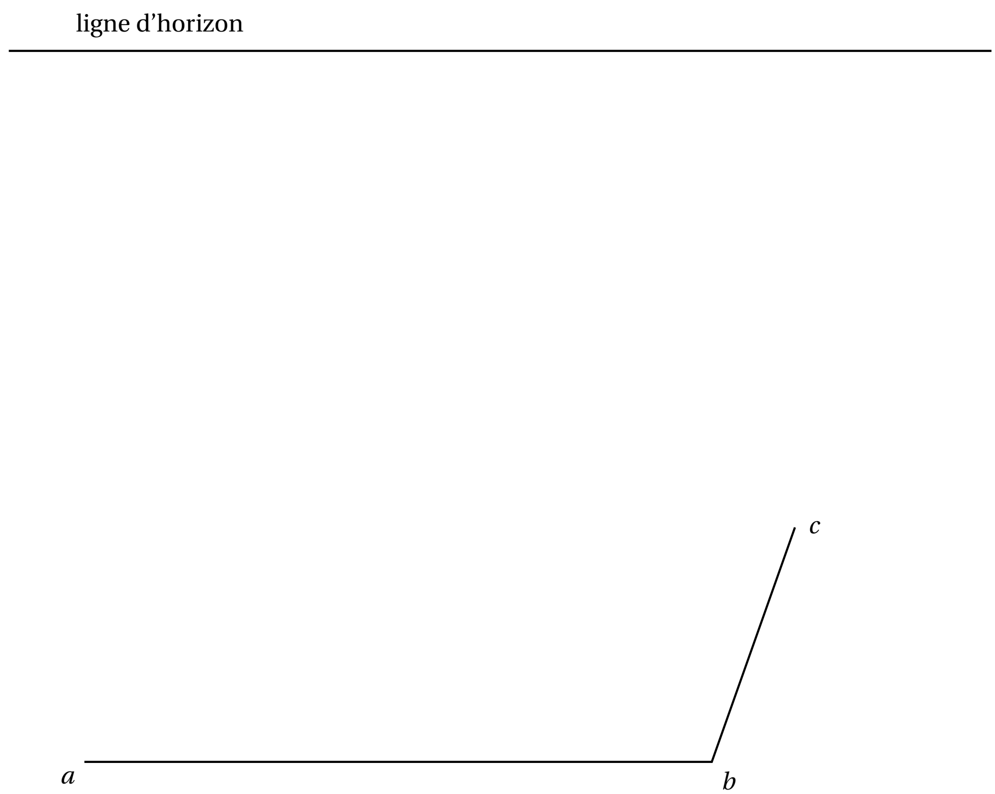


1. En utilisant les mailles *Pétale* M_1, M_2, M_3 et M_4 on réalise le motif *Décor* représenté dans la figure ci-contre.
   Par quelles transformations obtient-on le motif *Décor* à partir de la maille *Pétale* M_1 ? On utilisera des points présents dans la figure ci-contre pour définir ces transformations.
2. Démontrer que le triangle AA_1A_2 est isocèle et rectangle en A_1.
3. On réalise, à partir du motif *Décor*, un vitrail moderne représenté dans l'**annexe 3 à rendre avec la copie**.
   a. On admet que la somme des angles d'un quadrilatère quelconque vaut 360°.
   Justifier que $\widehat{PLA} + \widehat{ATE} = 285°$.
   b. En déduire que les mailles *Pétale* M_1, M'_2 et M_4 s'ajustent parfaitement autour du point L = E_3 ainsi que cela est représenté dans la figure ci-contre.
   c. Par quelles transformations peut-on obtenir ce vitrail en utilisant le motif *Décor* ?
   Pour définir ces transformations, on placera leurs éléments caractéristiques sur la figure de l'**annexe 3 à rendre avec la copie**.
4. On peut aussi réaliser ce vitrail à partir d'un autre motif constitué de quatre mailles. Colorier un de ces motifs sur l'**annexe 3 à rendre avec la copie**.



Annexe 1 à rendre avec la copie

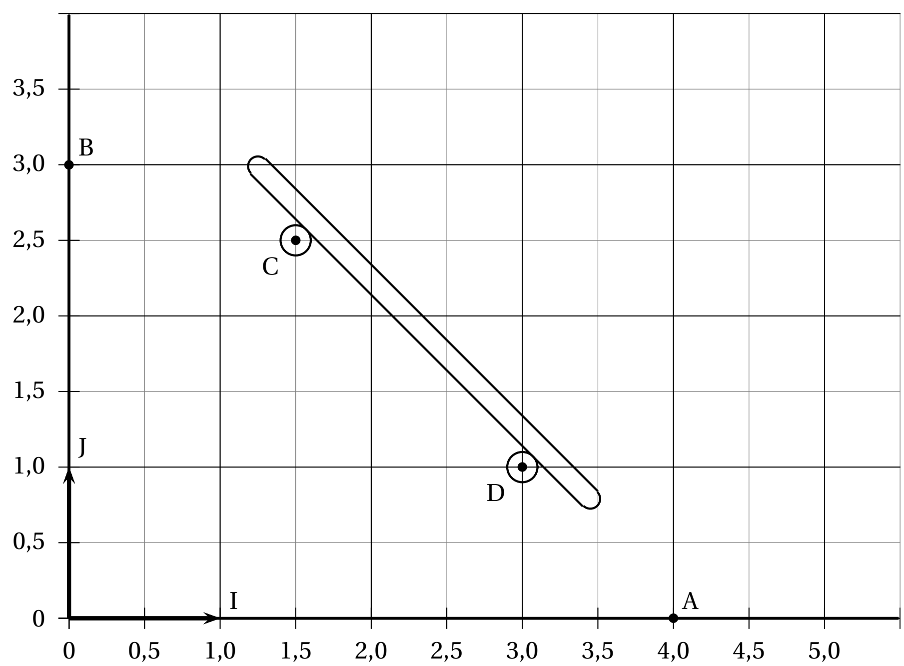
EXERCICE 1 - Partie B



Annexe 2 à rendre avec la copie

EXERCICE 2 - Partie A

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$									



Annexe 3 à rendre avec la copie

EXERCICE 3 - Partie B