Baccalauréat STI 2006

L'intégrale de mars à novembre 2006

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat STI Arts appliqués – Métropole juin 2006

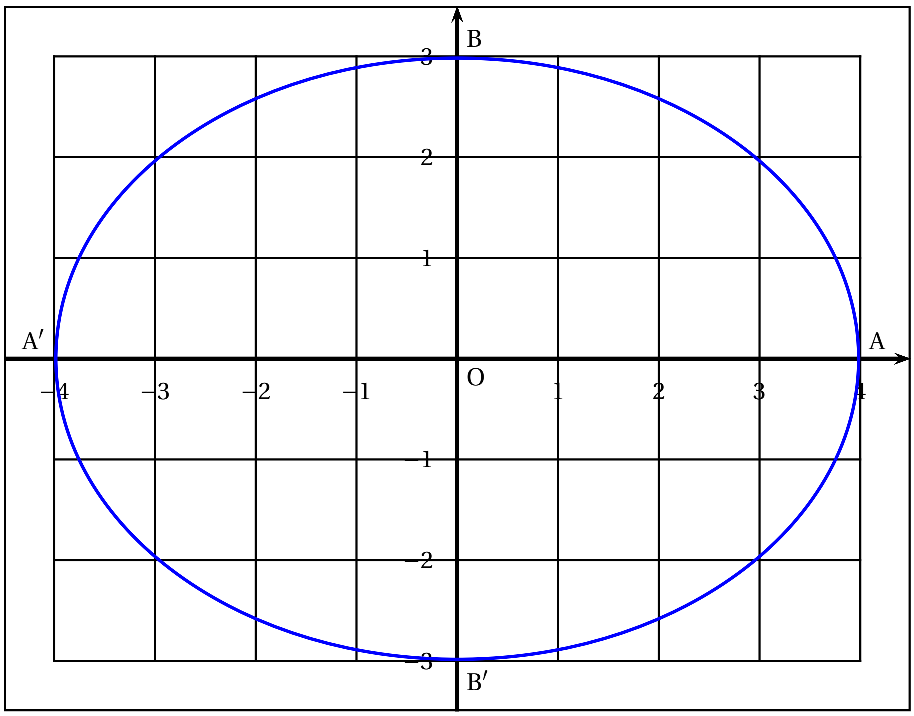
Coefficient : 2 | Durée : 2 heures

L'usage d'une calculatrice réglementaire est autorisé durant l'ensemble de l'épreuve.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE 1 **8 points**

Dans un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ on a dessiné une ellipse $\mathcal{E}$ de sommets :

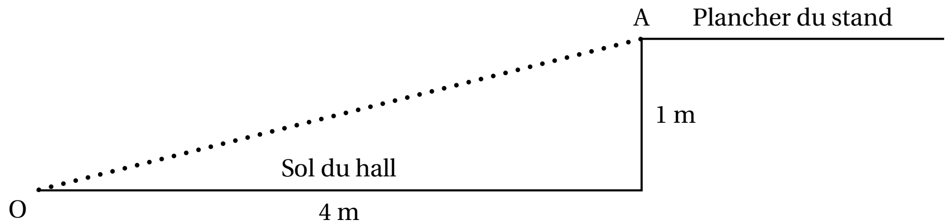
$$A(4 ; 0) \quad A'(-4 ; 0) \quad B(0 ; 3) \quad \text{et} \quad B'(0 ; -3)$$



1. Montrer qu'une équation de cette ellipse dans $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ est : $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
2. Construire géométriquement les deux foyers F et F′ puis calculer leurs coordonnées exactes.
3. Pour tout point M de l'ellipse $\mathcal{E}$, par quelle relation MF et MF′ sont-ils liés ?
4. Déterminer les valeurs exactes des abscisses des points de $\mathcal{E}$ d'ordonnée 2.
5. Les sommets d'un rectangle de centre O sont des points de l'ellipse $\mathcal{E}$ et ses côtés sont parallèles aux axes. Quelle doit être la longueur du côté horizontal de ce rectangle pour que sa hauteur soit égale à $2\sqrt{7}$?

EXERCICE 2 **12 points**

Pour la construction d'un stand d'exposition, des étudiants en BTS EVEC ont besoin de créer une rampe d'accès reliant le plancher du stand au sol du hall d'exposition. Une rampe plane ne pouvant permettre l'accès aux fauteuils roulants, les élèves de BTS proposent comme solution de remplacer sur la coupe ci-dessous, le segment [OA] par la courbe $\mathcal{C}$ qui fait l'objet du problème suivant.



On choisit le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ dans lequel le point A a pour coordonnées $(4\,;\,1)$ et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{32}\left(-x^3 + 6x^2\right).$$

1. Vérifier que O et A sont bien sur la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a.** Calculer la fonction dérivée f' de f. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-3}{32}x(x-4)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,4]$. Donner ensuite le tableau de variations de f sur $[0\,;\,4]$.

3. **a.** Calculer $f'(0)$ et $f'(4)$. Donner une interprétation graphique de ces résultats.

b. Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point I d'abscisse 2 ?

4. **a.** Recopier et compléter le tableau suivant : (on arrondira les valeurs au centième).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$								0,96	

b. On prendra comme unité graphique 5 cm. Représenter sur une feuille de papier millimétré la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que les tangentes aux trois points d'abscisses 0, 2 et 4.

5. **a.** Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

b. On note $\mathscr{S}$ la partie située entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$.

Calculer l'aire de $\mathscr{S}$ (en unités d'aires).

c. On précise qu'une unité d'aire sur le graphique correspond à 1 m^2 en réalité. Sachant que le stand a une largeur de 4 m, quel volume de béton devra-t-on utiliser pour construire la rampe d'accès ? La formule donnant ce volume est $V = B \times h$ où V est le volume, B l'aire de la partie correspondant à la partie $\mathscr{S}$ du graphique et h la largeur du stand.

Baccalauréat STI Arts appliqués – Métropole septembre 2006

Coefficient : 2 Durée : 2 heures

L'usage d'une calculatrice réglementaire est autorisé durant l'ensemble de l'épreuve.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE 1 — 8 points

Dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm, on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation

$$9x^2+25y^2=225.$$

1. Vérifier que les points M dont les coordonnées vérifient cette équation, sont solutions de l'équation : $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.
   Quelle est la nature de la courbe $\mathscr{C}$?
2. Calculer les coordonnées des sommets A, A′, B et B′.
3. Calculer les coordonnées des foyers F et F′.
4. **a.** Placer sur un graphique les points A, A′, B, B′, F et F′.

   b. Montrer que $\mathscr{C}$ est la réunion de deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équations respectives

   $$y=3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\quad \text{et} \qquad (1)\quad y=-3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}.$$

   c. En utilisant l'équation (1) de la courbe $\mathscr{C}_1$, compléter le tableau de valeurs, arrondies au dixième, ci-dessous.

x	0	1	2	3	4	5
y						

   d. Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$ sur l'intervalle $[0\,;\,5]$; puis en utilisant les éléments de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$, tracer $\mathscr{C}$.
5. Soit D le point de coordonnées $(-3~;~-2,4)$. Déterminer FD, F′D et FD + F′D.
   Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 2 — 12 points

Soit f la fonction numérique définie sur $]-1~;~+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2}.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).

1. Vérifier que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x)=2-\dfrac{3}{(x+1)^2}$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote dont on déterminera une équation.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote dont on déterminera une équation.

4. Vérifier que la dérivée de f est définie par $f'(x) = \dfrac{6}{(x+1)^3}$.

Trouver le signe de $f'(x)$ sur $]-1\ ;\ +\infty[$. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

5. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

6. Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées puis du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

7. **a.** Compléter le tableau de valeurs, arrondies au dixième, suivant :

x	$-0,5$	0	1	2	3	5
$f(x)$						

b. Construire sur un même graphique les asymptotes, T, puis $\mathscr{C}_f$.

8. **a.** Montrer que la fonction F définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = 2x + \dfrac{3}{x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

b. On considère la partie $\mathscr{A}$ du plan comprise entre les droites d'équation $x = 1$, $x = 5$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.

Déterminer l'aire de $\mathscr{A}$ en unités d'aire et ensuite en cm^2.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole juin 2006

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes suivants :

$$z_{\text{A}} = \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{6}, \qquad z_{\text{B}} = 2 - 2\text{i}.$$

On pose $z = \frac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}$.

1. Écrire z sous forme algébrique.
2. **a.** Calculer le module et un argument de z_{A} et de z_{B}.

   b. En déduire le module et un argument de z.

   c. Écrire z sous forme trigonométrique.
3. Déduire des résultats obtenus aux questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\sin\frac{7\pi}{12}$
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

   a. Sur papier millimétré, construire les points A et B, images respectives de z_{A} et de z_{B}.

   b. Déterminer la nature du triangle OAB.

EXERCICE 2 **4 points**

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}$, dans un repère orthonormal d'unité 2 cm, de la fonction f définie sur $[0\,;\,2\pi]$ par :

$$f(x) = 2 - \sin\frac{x}{2}$$

1. Vérifier, par le calcul, que :

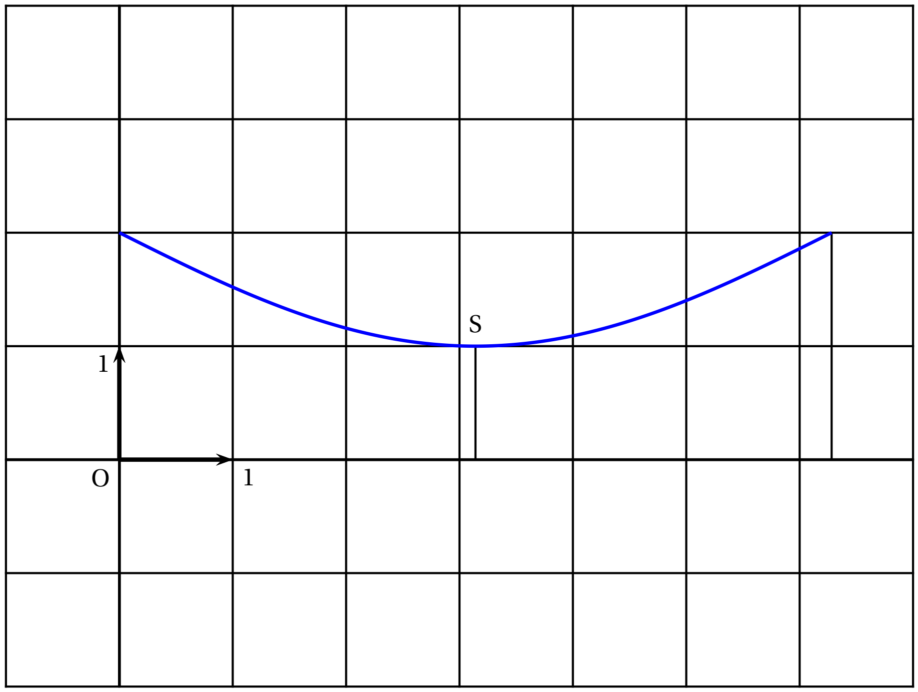
   a. la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $\text{S}(\pi\,;\,1)$.

   b. la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point S est parallèle à l'axe des abscisses.

   c. la fonction f est solution de l'équation différentielle : $4y'' + y - 2 = 0$.
2. On veut calculer la valeur exacte du volume du solide de révolution engendré par la courbe $\mathscr{C}$ lors de sa rotation autour de l'axe des abscisses. On rappelle que la valeur V de ce volume, en unités de volume, est donnée par la formule :

$$\text{V} = \pi\int_0^{2\pi}[f(x)]^2\,\text{d}x.$$

   a. On pose, pour tout nombre réel x appartenant à $[0\,;\,2\pi]$, $g(x) = [f(x)]^2$. Démontrer que l'on a : $g(x) = \frac{9}{2} - 4\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos x$.



b. Donner la valeur exacte de ce volume en cm^3, puis sa valeur arrondie au mm^3 près.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** En remarquant que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}[2x - (1+x)\ln(1+x)],$$

   calculer la limite de f en -1 (on pourra utiliser sans démonstration $\lim\limits_{X\to 0} X\ln X = 0$).

   b. En déduire une équation d'une droite $\mathscr{D}$ asymptote à $\mathscr{C}$.
3. Déterminer la dérivée f' de f et montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x)^2}$. (1 + x)
4. **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

   b. Calculer la valeur exacte de $f(1)$.

   c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
2. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α dans l'intervalle $[1 ; 5]$.
   Démontrer que $\ln(1+\alpha) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha}$.
   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.
4. Tracer, dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, la tangente $\mathcal{T}$, la droite $\mathcal{D}$ puis la courbe $\mathcal{C}$.

Partie C

1. Démontrer que, sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$, la fonction F définie par

$$F(x) = (-3-x)\ln(1+x)+3x$$

   est une primitive de la fonction f.
2. Soit $\mathcal{H}$ la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.
   a. Hachurer la partie $\mathcal{H}$ sur le dessin.
   b. Calculer, en unités d'aire et en fonction de α, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie $\mathcal{H}$ et démontrer que $\mathcal{A}(\alpha) = 2\left(\dfrac{\alpha^2-3\alpha}{1+\alpha}\right)$ cm^2.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie juin 2006 ∾
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8.$$

   a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z-2)\left(z^2 - 2z + 4\right)$.

   b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. On note A, B, C, les points d'affixes respectives : $a = 2$; $b = 1 + \text{i}\sqrt{3}$; $c = 1 - \text{i}\sqrt{3}$.

   a. Déterminer le module et un argument de a, b, c.

   b. En déduire le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

   c. Placer les points A, B et C en laissant visibles les traits de construction.

   d. Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.

3. On pose $d = a + b$ et on note D le point d'affixe d.

   a. Construire le point D dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   b. Démontrer que A est le milieu du segment [CD].

   c. Écrire d sous forme exponentielle.

   d. Démontrer que OCD est un triangle rectangle.

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : Calcul d'une primitive

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par

$$g(x) = \frac{x}{x+1}$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 2]$, $g(x) = a + \frac{b}{x+1}$.
2. En déduire une primitive de g sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

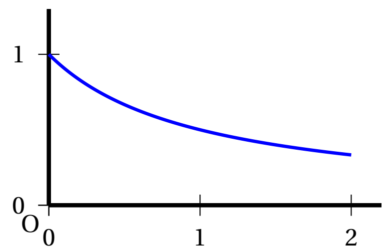
Partie B : Détermination du centre de gravité d'une plaque homogène

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

On considère une plaque homogène formée par l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan dont les coordonnées vérifient les relations : $0 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. (Voir schéma ci-dessous).

1. Soit $\mathscr{S}$ l'aire de la plaque exprimée en unité d'aire.
   Démontrer que $\mathscr{S} = \ln 3$.
2. Soit G le centre de gravité de la plaque. On admettra que les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ de G sont données par les formules suivantes :
   $X = \dfrac{1}{\mathscr{S}} \displaystyle\int_0^2 x f(x)\,\mathrm{d}x$ et
   $Y = \dfrac{1}{2\mathscr{S}} \displaystyle\int_0^2 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.
   a. Calculer la valeur exacte de X, puis une valeur approchée arrondie au centième.
   b. Calculer la valeur exacte de Y, puis une valeur approchée arrondie au centième.



PROBLÈME **10 points**

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (1) : $y' + y = 2\mathrm{e}^{-x}$, dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' + y = 0$.
2. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$. Vérifier que h est solution de l'équation (1).
3. On admet que toute solution de (1) s'écrit sous la forme $g + h$, où g désigne une solution de l'équation (2).
   a. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).
   b. Déterminer la solution f de l'équation (1) vérifiant la condition initiale $f(0) = -1$.

Partie B. Étude d'une fonction exponentielle

On note f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Unités graphiques : 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

1. Étude des limites.
   a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. En écrivant, pour tout réel x, $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
   Quelle conséquence graphique peut-on en tirer pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. étude des variations de f
   a. Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f, puis démonter que, pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de $(-2x+3)$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f
3. Représentations graphiques.
   a. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
   b. Déterminer une équation de chacune des tangentes (T) et (T') à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

c. Tracer (T), (T') et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie C. Détermination d'une primitive

1. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = -f'(x) + 2\text{e}^{-x}$.

2. En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Métropole septembre 2006
Génie mécanique, civil

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **4 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$\left(z^2+9\right)\left(z^2-9z+27\right)=0.$$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}}=3\mathrm{i}\quad ;\quad z_{\mathrm{B}}=\frac{9}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\quad \text{et } z_{\mathrm{C}}=\frac{9}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

a. Écrire chacun des nombres complexes $z_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{B}}$ et z_{C} sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où r est un nombre, réel positif et θ un nombre réel.

b. Soit I le point d'affixe $z_{\mathrm{I}}=2$. Calculer les distances AI, BI et CI.
En déduire que les points A, B et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. À l'aide d'une règle et d'un compas, construire les points I, A, B et C. On utilisera une feuille de papier millimétré et on laissera apparents les traits de construction pour les points B et C.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle : $y''+16y=0$, y désignant une fonction numérique d'une variable réelle définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

2. Déterminer la solution f de cette équation différentielle vérifiant :

$$f(0)=\frac{1}{10}\quad \text{et } f'(0)=-\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

3. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x)=\dfrac{1}{5}\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4. **a.** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation $f(x)=\dfrac{1}{5}$.

b. Déterminer les solutions de l'équation $f(x)=\dfrac{1}{5}$ qui appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$.
Représenter ces solutions sur un cercle trigonométrique.

PROBLÈME **12 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x)=2x^2-4\ln x+4.$$

1. Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g et prouver que, pour tout nombre réel x strictement positif :
$$g'(x) = \frac{4x^2 - 4}{x}.$$
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations (on ne demande pas le calcul des limites).
3. Déterminer le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on étudie la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par
$$f(x) = 2x - 3 + 4\frac{\ln x}{x}.$$
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en 0.
   b. Interpréter graphiquement le résultat précédent.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   c. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
3. Déterminer la dérivée f' de la fonction f et prouver que, pour tout nombre réel x strictement positif :
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$
4. À l'aide des résultats de la partie A, indiquer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1\,;\,2]$.
   b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-4} de α.
6. Pour quelle valeur de x la courbe $\mathscr{C}$ admet-elle, au point d'abscisse x, une tangente parallèle à $\mathscr{D}$?
7. Construire avec soin la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ (on utilisera une feuille de papier millimétré).

Partie C

Dans cette partie, on souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$, en cm^2, du domaine $\mathscr{E}$ situé entre les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$.

1. Hachurer le domaine $\mathscr{E}$ sur le graphique réalisé à la partie B.
2. Montrer que $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^5 4\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.
3. **a.** On pose, pour tout nombre réel x strictement positif, $H(x) = (\ln x)^2$.
   Déterminer la dérivée de la fonction H.
   b. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur approchée au mm^2 près.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI décembre 2006 Nouvelle-Calédonie
Génie Mécanique - Génie énergétique - Génie Civil

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet. Une feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.

1. Résolution d'une équation.

a. Résoudre , dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$(z - 4\text{i})\left(z^2 - 4z + 8\right) = 0.$$

b. Déterminer l'écriture de chacune des solutions sous la forme exponentielle $\rho\text{e}^{\text{i}\theta}$ où ρ est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel.

2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 2 - 2\text{i}$, $b = 2 + 2\text{i}$ et $c = 4\text{i}$.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

b. Placer le milieu M du segment [BC] et calculer son affixe m sous la forme algébrique.

3. On désigne par B′, C′ et M′ les points d'affixes respectives $b' = \dfrac{16}{b}$, $c' = \dfrac{16}{c}$ et $m' = \dfrac{16}{m}$.

a. Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes b' et c'.
On admettra que $m' = \dfrac{8}{5} - \dfrac{24}{5}\text{i}$.

b. Placer les points B′, C′ et M′ sur la figure.

4. Quelques configurations géométriques.

a. Calculer les modules des nombres complexes $b' - a$, $c' - a$ et $m' - a$.

b. En déduire que les points B′, C′ et M′ appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ de centre A

c. Tracer le cercle $\mathscr{C}$ sur la figure et démontrer que le point O appartient au cercle $\mathscr{C}$.

d. Démontrer que le triangle isocèle AB′C′ est rectangle en A.

EXERCICE 2 **3 points**

Le dispositif de la figure A ci-dessous est constitué d'une cuve reliée à un récipient par un tuyau muni d'une vanne.
Cette vanne étant fermée, on remplit d'eau la cuve (figure A). On ouvre ensuite la vanne et l'eau passe dans le récipient d'où elle s'écoule en pluie fine par le fond percé d'une multitude du petits orifices comme l'indique la figure B ci-dessous.

begincenter

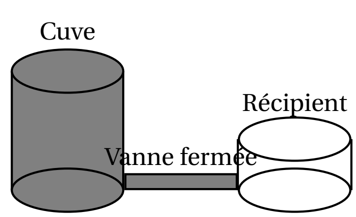


Figure A

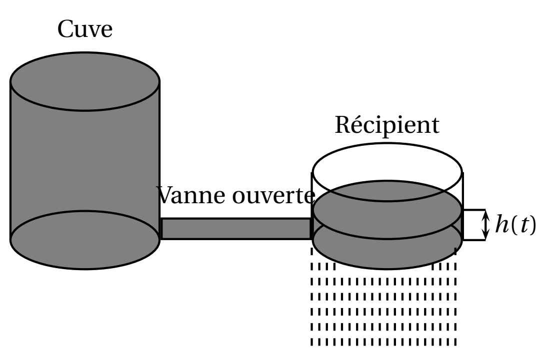


Figure B

On considère alors la fonction h qui à tout instant t exprimé en minutes, fait correspondre la hauteur d'eau $h(t)$, exprimée en mètres, dans le récipient. On choisit l'instant où l'on ouvre la vanne comme origine des temps et, à cet instant $t = 0$, la hauteur d'eau dans le récipient est nulle.
On admet que la fonction h est définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et qu'elle vérifie, pour tout nombre réel t de cet intervalle, la relation

$$h'(t) + 2h(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}$$

où h' désigne la dérivée de la fonction h.

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = h(t) - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}$.

a. Démontrer que g est une solution de l'équation différentielle (E) $y' + 2y = 0$.

b. Résoudre l'équation différentielle (E).

c. Utiliser les résultats précédents et la condition initiale $h(0) = 0$ pour démontrer que, pour tout t appartenant à $[0~;~+\infty[$: $h(t) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)$.

2. Étude des variations de h

a. Déterminer la limite de h en $+\infty$

b. Calculer $h'(t)$ et démontrer que pour tout réel t appartenant à $[0~;~+\infty[$, $h'(t)$ a même signe que $2\mathrm{e}^{-t} - 1$.

c. Étudier le signe de $2\mathrm{e}^{-t} - 1$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction h. Calculer $h(\ln 2)$.

3. En déduire la hauteur minimale en millimètres que doit avoir le récipient pour que l'eau s'en écoule entièrement par le fond, c'est-à-dire sans déborder du récipient, lorsque la vanne reste ouverte.

PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 4 - \ln 2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln x$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien. On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan d'unité graphique 2 cm.

Partie A : étude de la fonction f

1. Étude des limites.

a. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ et en déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote dont on précisera une équation.

b. Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$ on a :

$$f(x) = 4 - \ln 2 - x\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\right) \quad \text{et en déduire } \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

2. Étude du signe de f sur un intervalle

a. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{2x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et dresser le tableau des variations de la fonction f.

c. Calculer $f(4)$ et en déduire que la fonction f est positive ou nulle sur l'intervalle $[1\,;4]$.

3. On désigne par A et B les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et 4.

a. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en B.

b. Tracer les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B puis $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie B

On admet que, compte tenu de l'unité graphique utilisée, la longueur L, exprimée en cm, de l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée par l'intégrale suivante :

$$L = \int_1^4 2\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\text{d}x.$$

1. Démontrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $1+[f'(x)]^2 = \left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{x}{2}\right)^2$.

2. Calculer la valeur exacte de la longueur en cm de l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$ de la courbe $\mathscr{C}_f$, puis en donner un valeur approchée arrondie au mm.

Partie C

On considère la région $\mathscr{A}$ du plan délimitée par la droite d'équation $x = 1$, l'axe des abscisses et l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$ de la courbe $\mathscr{C}_f$.

1. On considère la fonction G définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $G(x) = x\ln x - x$.
Démontrer que la fonction G est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de $\mathscr{A}$ (On utilisera le résultat de 2 c de la partie A), puis en donner une valeur approchée arrondie au mm^2.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Antilles-Guyane
Génie électronique juin 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 3 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $z_B = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}$; i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. **a.** Écrire z_A et z_B sous forme trigonométrique, puis sous forme exponentielle.

   b. En utilisant la règle et le compas, placer les points A et B dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. On laissera apparents les traits de construction.

   c. Démontrer que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

2. Dans ce qui suit, on considère la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On appelle C l'image du point A par cette rotation.

   a. Placer le point C dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. On laissera apparents les traits de construction.

   b. Déterminer l'affixe z_C du point C sous forme exponentielle.

   c. Quelle est l'image du point B par la rotation ? Justifier.

   d. En déduire l'image du triangle OAB par la rotation.

EXERCICE 2 **5 points**

Un circuit électrique comprend en série un générateur, un conducteur ohmique de résistance R (exprimée en ohms), un condensateur de capacité C (exprimée en farads) et un interrupteur. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et le générateur délivre alors une tension constante E (exprimée en volts). On procède ainsi à la charge du condensateur.

La charge q en coulombs du condensateur est une fonction dérivable du temps t (exprimé en secondes) ; l'intensité i du courant (exprimée en ampères) est alors telle que $i(t) = q'(t)$.
On considère l'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{RC}y = \frac{E}{R}$$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dans tout ce qui suit, on prend $R = 1\,000$, $C = 10^{-4}$ et $E = 10$.

1. Écrire l'équation différentielle ci-dessus en remplaçant R, C et E par leurs valeurs respectives.
2. On admet que la fonction q est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$q(t) = -10^{-3}\mathrm{e}^{-10t} + 10^{-3}.$$

   a. Déterminer la fonction dérivée q' de la fonction q, puis vérifier que q est solution sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle établie à la question 1.

   b. Déterminer $q(0)$, la limite de q en $+\infty$ et le sens de variations de q sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. On admet que l'intensité du courant i qui parcourt le circuit à l'instant t est donnée par $i(t) = 10^{-2}\mathrm{e}^{-10t}$.
   Déterminer la valeur exacte de l'instant t_0 à partir duquel l'intensité $i(t)$ est inférieure ou égale à 10^{-3} ampère. Préciser sa valeur arrondie au centième de seconde.

4. On sait enfin que l'énergie W dissipée dans le conducteur ohmique, exprimée en joules, entre les instants $t = 0$ et $t = 0,23$, est donnée par :
$W = 1\,000 \displaystyle\int_0^{0,23} i^2(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Préciser une primitive de la fonction h définie sur $[0~;~+\infty[$ par $h(t) = \mathrm{e}^{-20t}$.

b. Calculer alors W et en donner la valeur arrondie à 10^{-3} près.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction f définie et dérivable sur v dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm est donnée en annexe. Cette courbe passe par le point A(1 ; 4).
Dans la partie I, le but est de déterminer graphiquement certaines propriétés de la fonction f. On prouve ensuite ces propriétés dans la partie II à partir de l'expression de $f(x)$. Enfin, dans la partie III, on s'intéresse à un calcul d'aire.

Partie I

On répondra aux questions suivantes en utilisant la représentation graphique donnée en annexe. Si cela n'est pas demandé explicitement, on ne justifiera pas la réponse.

1. **a.** On admet que la fonction f est décroissante sur $]0;~1[$ et que l'axe des ordonnées est asymptote à $\mathcal{C}_f$. Donner $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.

b. Peut-on donner $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ à partir du graphique ? Pourquoi ?

2. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[1~~15]$, deux solutions ; on notera α et β ces solutions, avec $\alpha < \beta$.

b. Donner un encadrement d'amplitude 0,5 pour chacun des deux nombres α et β.

c. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle $[1~;~15]$.

3. On admet que la droite passant par les points A(1 ; 4) et B(2 ; −2) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

a. Donner la valeur de $f'(1)$.

b. Donner, en justifiant, une équation de la droite (AB).

Partie II

On admet maintenant que la fonction f est définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 2(\ln x)^2 - 6\ln x + 4.$$

Le but de cette partie est de démontrer les résultats obtenus à la partie I, en utilisant l'expression de $f(x)$.

1. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$. Quelle propriété graphique de la courbe $\mathcal{C}_f$ retrouve-t-on ainsi ?

b. Démontrer que pour $x \neq 1$ on a $f(x) = (\ln x)\left[2\ln x - 6 + \dfrac{4}{\ln x}\right]$ puis en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2. **a.** Démontrer que $f'(x) = \dfrac{4\ln x - 6}{x}$ ou f' désigne la dérivée de f.

b. Résoudre dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$ l'inéquation $4\ln x - 6 > 0$.

c. En déduire le sens de variations de f et dresser le tableau de variations de f. On calculera la valeur exacte du minimum de f sur $]0~;~+\infty[$.

3. **a.** En utilisant les résultats de la question 2 démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[1~;~15]$.

b. Donner les valeurs exactes de $f\left(\sqrt{\text{e}}\right)$, $f(\text{e})$ et $f\left(\text{e}^2\right)$.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

Partie III

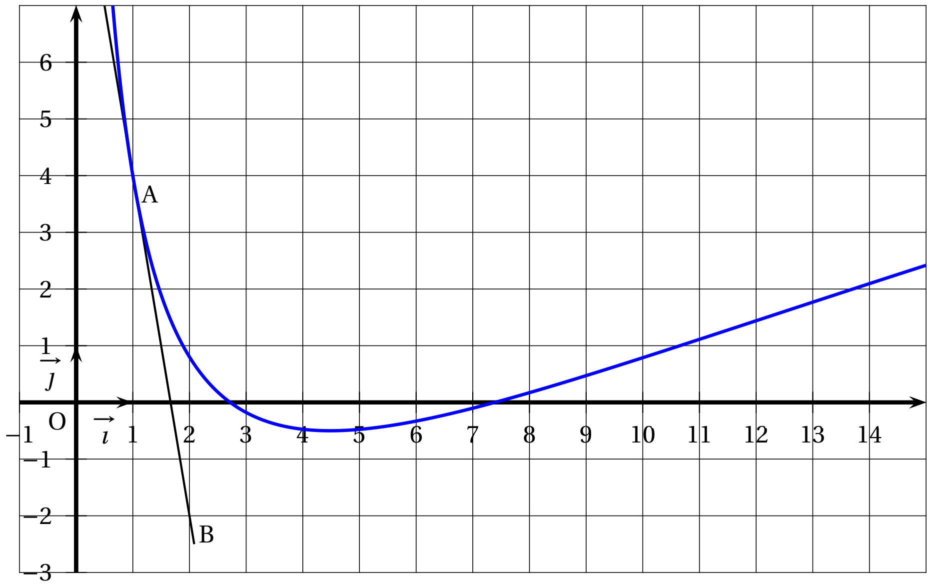
1. Sur la feuille annexe **à rendre avec la copie**, hachurer le domaine D délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

2. Démontrer que la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = 2x(\ln x)^2 - 10x\ln x + 14x$ est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** En déduire l'expression de l'aire, en unités d'aire, du domaine D sous la forme d'une intégrale.

b. Donner la valeur exacte de cette aire en cm^2, puis sa valeur en mm^2, arrondie à l'unité.

Feuille annexe à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI La Réunion juin 2006 ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **4,5 points**

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes et i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 4z + 16 = 0.$$

2. On considère les nombres complexes :

$$z_1 = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

a. Déterminer le module et un argument de z_1.

b. écrire z_1, puis z_2 sous forme exponentielle.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.

On considère la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$.

a. Placer les points M_1, et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

b. Montrer que le point M_2 est l'image du point M_1 par la rotation r.

c. On appelle M_3 le point image du point M_2 par la rotation r.
Calculer l'affixe z_3 du point M_3.
Placer le point M_3 dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

d. Démontrer que le triangle $\mathrm{M}_1\,\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ est équilatéral.

4. Vérifier que les nombres complexes $(z_1)^6$ et $\dfrac{(z_1)^4}{(z_2)^2}$ sont des entiers naturels.

On utilisera la forme de z_1 et z_2 la plus adaptée.

EXERCICE 2 **4,5 points**

I. On considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_0) \quad : \quad y'' + 4y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et y'' sa dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation (E_0).

2. Déterminer la solution particulière f de (E_0) vérifiant :

$$f(0) = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad f'(0) = 2$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Montrer que pour tout réel t, $f(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) = 2\cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right).$$

4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

II. On considère maintenant l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad y'' + 4y = 3\sin t$$

où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$, et y'' sa dérivée seconde.

1. Montrer que si une fonction g est solution de l'équation (E_0), alors la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(t) = g(t) + \sin t$ est solution de l'équation (E_1).
2. Donner une solution particulière, ne s'annulant pas pour $t = 0$, de l'équation (E_1).

PROBLÈME — 11 points

Sur la feuille annexe, **qui doit être remise avec la copie**, on donne, dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

Partie A : détermination de la fonction *f*

On suppose que la courbe passe par le point A de coordonnées $\left(3\,;\,-\frac{7}{2} + 3\ln 2\right)$.
La droite D d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale â la courbe $\mathscr{C}_f$.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Quelle est la valeur exacte de $f(3)$?
2. Donner sans justification la limite de la fonction f en 2.
3. On suppose que, pour tout réel x de l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$,

$$f(x) = ax - 5 + 3\ln(x-1) - 3\ln(x-2).$$

   En utilisant la réponse de la question 1, déterminer algébriquement le nombre a.

Partie B : étude de la fonction *f*

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln(x-1) - 3\ln(x-2).$$

1. **a.** Retrouver par le calcul la limite de la fonction f en 2.

   b. Montrer que, pour tout x réel de l'intervalle $]2+\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right).$$

   c. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x - 5$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$. Tracer Δ sur la feuille annexe.

3. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{x^2-3x-4}{2(x-1)(x-2)}.$$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2{,}1\,;\,3]$ et une solution unique β dans l'intervalle $[9\,;\,10]$.

   b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune des solutions α et β.

Partie C : calcul d'aire

1. On considère les fonctions h et H définies sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \quad \text{et} \quad H(x) = (x-1)\ln(x-1)-(x-2)\ln(x-2).$$

   a. Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

   b. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

2. On considère le domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 9$.

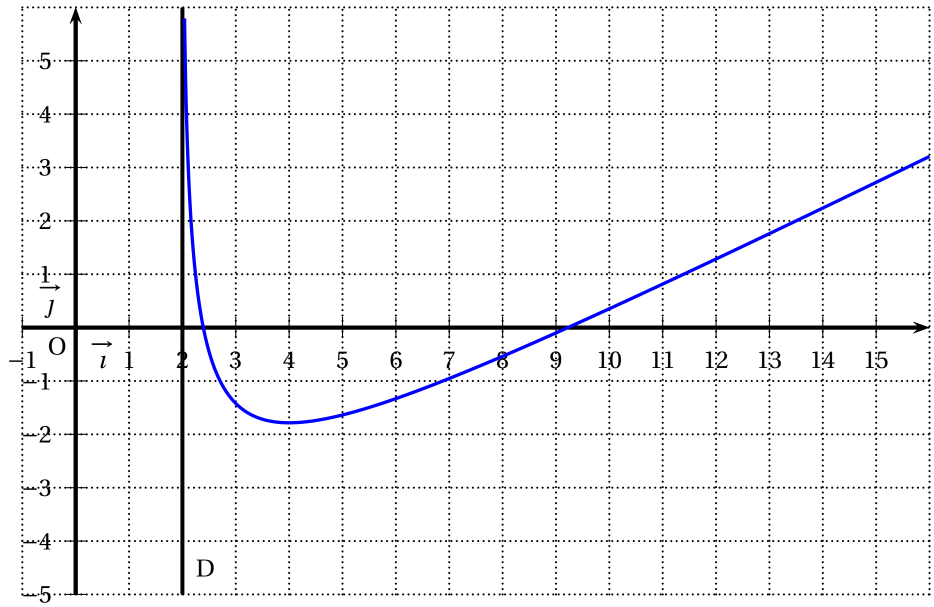
   a. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique de la feuille annexe.

   b. On note $\mathscr{A}$ la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine $\mathscr{D}$. Exprimer $\mathscr{A}$ sous la forme d'une intégrale.

   c. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Courbe de la fonction f



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Métropole juin 2006
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{B}} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   - **a.** Déterminer le module et un argument de z_{A} et z_{B}.
   - **b.** Donner la forme exponentielle de z_{A}.
   - **c.** Placer les points A et B dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
3. On désigne par R la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\,z.$$

   - **a.** Indiquer la nature de la transformation R et préciser ses éléments caractéristiques.
   - **b.** On nomme C l'image du point A par la transformation R. Déterminer la forme exponentielle de l'affixe z_{C} du point C. En déduire sa forme algébrique.
   - **c.** Placer le point C.
   - **d.** Montrer que le point B est l'image du point C par la transformation R.
4. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.

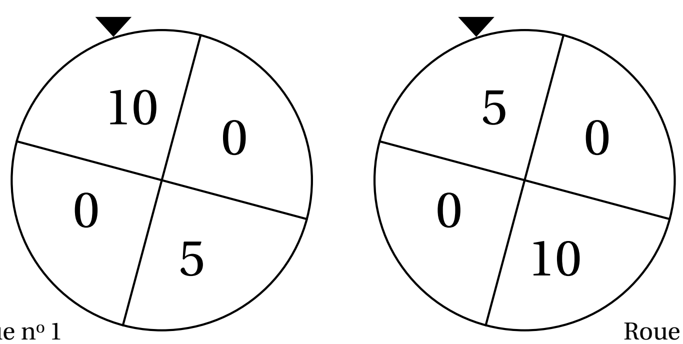
EXERCICE 2 **4 points**

Pour la fête de l'école, une association propose une loterie selon le principe suivant :

— Le joueur mise 10 euros.

— Il fait tourner deux roues identiques chacune s'arrêtant devant un repère.

Chaque roue est divisée en quatre quartiers sur lesquels sont indiqués les gains en euros 10 ; 0 ; 5 ; 0. Tous les quartiers ont la même probabilité de s'arrêter devant le repère. La gain obtenu par le joueur est égal à la somme des gains indiqués sur les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues.



Roue n° 1 Roue n° 2

Dans l'exemple ci-dessus, la partie assure au joueur un gain de 15 €.

1. Étude du gain d'un joueur pour une mise de 10 euros.

On nomme G la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain du joueur en euros.

a. Reproduire et compléter le tableau suivant donnant les valeurs prises par la variable aléatoire G selon les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues :

Roue n° 1 / Roue n° 2	10	0	5	0
10				
0				
5				
0				

b. Prouver que la probabilité que le joueur obtienne un gain supérieur ou égal à sa mise est 50 %.

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

d. Calculer la probabilité, notée $p(G > 10)$, qu'un joueur obtienne un gain strictement supérieur à sa mise.

e. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire G, puis donner son interprétation.

2. Étude du bénéfice de l'association pour une mise de m euros.

On suppose dans cette question que la mise du joueur est m euros.

On note B la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le bénéfice (positif ou négatif) réalisé par l'association, c'est-à-dire la différence entre la mise qu'elle a encaissée et le gain éventuel qu'elle a reversé au joueur.

a. Exprimer en fonction de m l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

b. Déterminer m pour que l'espérance de bénéfice de l'association soit d'au moins 5 €.

PROBLÈME **11 points**

Partie A Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad : \quad y' + y = -x - 1$$

où y désigne une fonction de la variable x définie et dérivable sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

1. a. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.

b. Déterminer la solution h de cette équation différentielle $y' + y = O$ prenant la valeur $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ en $x = 1$.

2. Déterminer le nombre réel a tel que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax$ soit solution de l'équation différentielle (E).

Partie B : étude d'une fonction auxiliaire *f*

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. f' désigne la fonction dérivée de la fonction f. Calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ puis en déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.

4. Préciser le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie C : Calcul de l'aire d'une partie du plan

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ est tracée sur la feuille jointe en annexe, qui est à rendre avec la copie.

1. Dans le demi-plan constitué des points d'abscisses positives, hachurer la partie $\mathscr{D}$ limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
2. Calculer en fonction de α la mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie $\mathscr{D}$ du plan.

Partie D : étude d'une fonction g et représentation graphique

La fonction g est définie sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ par :

$$g(x) = \frac{x}{\text{e}^{-x} - x}$$

(où α désigne le nombre réel trouvé à la partie B et on note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. **a.** Vérifier que, pour tout $x \in]-\infty\,;\,\alpha[$, $g(x) = \dfrac{x\text{e}^x}{1 - x\text{e}^x}$.

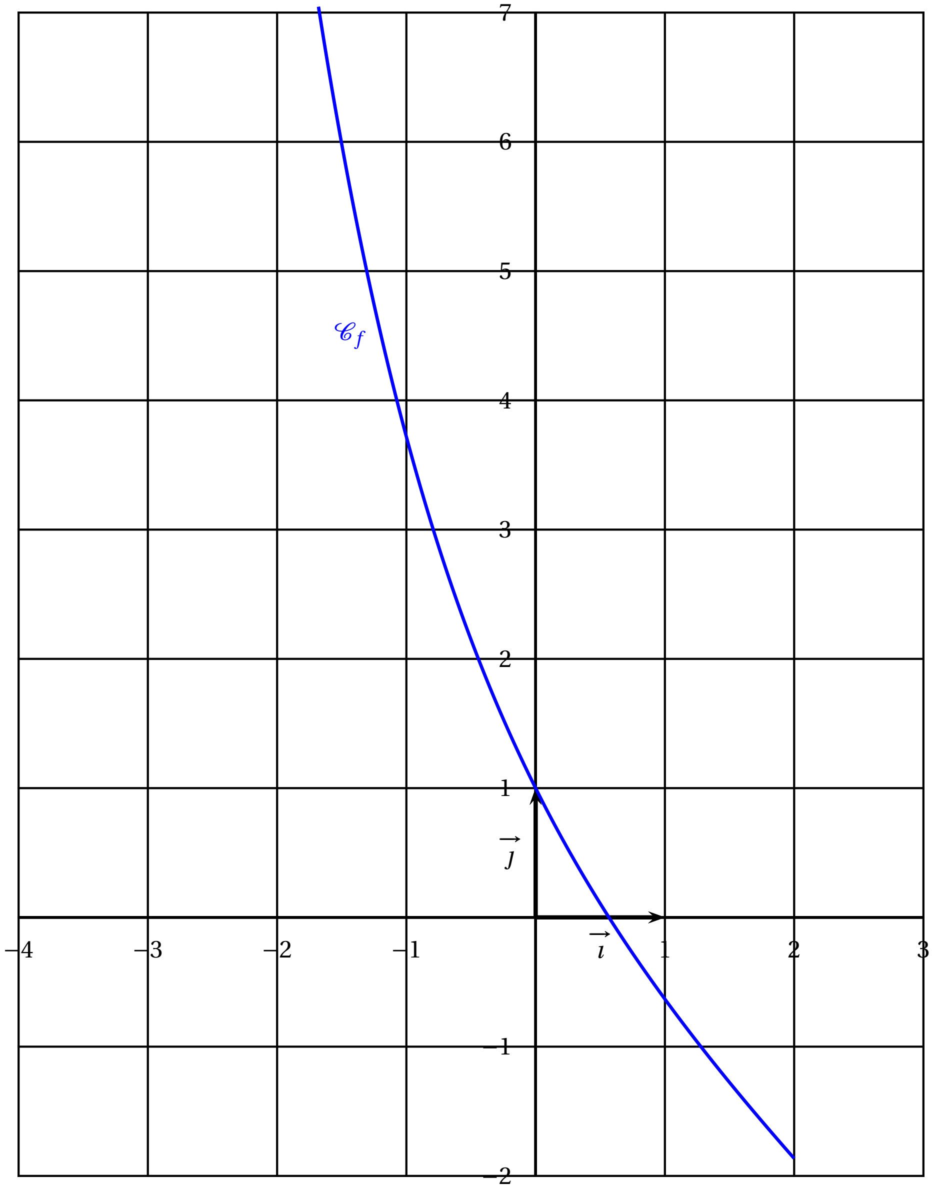
   b. En déduire la limite de la fonction g en $-\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.

2. En utilisant les résultats trouvés dans la partie B question 4, déterminer la limite de la fonction g en α. Interpréter graphiquement cette limite.
3. **a.** La fonction g' désignant la dérivée de la fonction g, montrer que pour tout x de $]-\infty\,;\,\alpha[$, $g'(x) = \dfrac{\text{e}^{-x}(1+x)}{(\text{e}^{-x} - x)^2}$.

   b. En déduire les variations de la fonction g sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ et dresser le tableau des variations de la fonction g.

4. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie.

Feuille annexe à remettre avec la copie



Baccalauréat STI Génie électronique Polynésie juin 2006

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm). Soient les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = 1 + \text{i}\sqrt{3}$.

1. **a.** Déterminer le module et un argument des nombres z_1 et z_2.
   b. Placer les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.
2. Soit Z le nombre complexe tel que $Z = \dfrac{z_2}{z_1}$.
   Écrire Z sous forme exponentielle, en déduire une mesure en radians de l'angle θ de la rotation de centre O qui transforme A en B.
3. **a.** Écrire Z sous forme trigonométrique.
   b. En utilisant les formes algébriques de z_1 et z_2, déterminer la forme algébrique de Z.
   c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 2 **4 points**

Un commercial vend entre 0 et 4 voitures d'un certain modèle en une semaine. Soit X la variable aléatoire qui, pour une semaine, donne le nombre de voitures vendues. X suit la loi de probabilité ci-dessous :

Nombre de voitures vendues	0	1	2	3	4
$p(X = k)$	0,26	0,23		0,15	0,05

1. Calculer la probabilité de vendre exactement deux voitures en une semaine.
2. Justifier que la probabilité de vendre au moins deux voitures en une semaine est égale à $0,51$.
3. Donner une représentation graphique de la fonction de répartition F de cette loi dans un repère convenablement choisi.
4. Calculer l'espérance mathématique de cette variable aléatoire. En déduire le nombre moyen de voitures vendues en une année (c'est-à-dire 52 semaines).
5. Le prix de vente d'une voiture est de 13 500 €. Le vendeur perçoit une commission de 0,4 % sur le prix de vente pour chaque voiture vendue. Déterminer le montant moyen de la commission perçue en un an.

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. On a déterminé expérimentalement des valeurs de f qui ont permis d'obtenir une partie de la courbe $(\mathscr{C})$, représentative de la fonction f, et sa tangente (T) au point O (voir feuille annexe).

Partie A

1. À l'aide du graphique, déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
2. On admet que l'expression de $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax + b - \ln(10x + 1)$ où a et b sont des réels.

a. Déterminer $f'(x)$ en fonction de a.

b. En utilisant les résultats du 1., déterminer les réels a et b.

Partie B

On admet désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $\text{I} =]-0,1\,;\,10]$ par

$$f(x) = 0,5x - \ln(10x+1).$$

1. Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -0,1\\ x>-0,1}} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$ représentant f ?

2. Calculer la fonction f' dérivée de la fonction f. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $5x-9,5$ sur l'intervalle I.

Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle I.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a dans l'intervalle $[6\,;\,10]$ une solution unique, que l'on notera α.

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $\text{I} =]-0,1\,;\,10]$ par :

$$F(x) = 0,25x^2 + x - (x+0,1)\ln(10x+1)$$

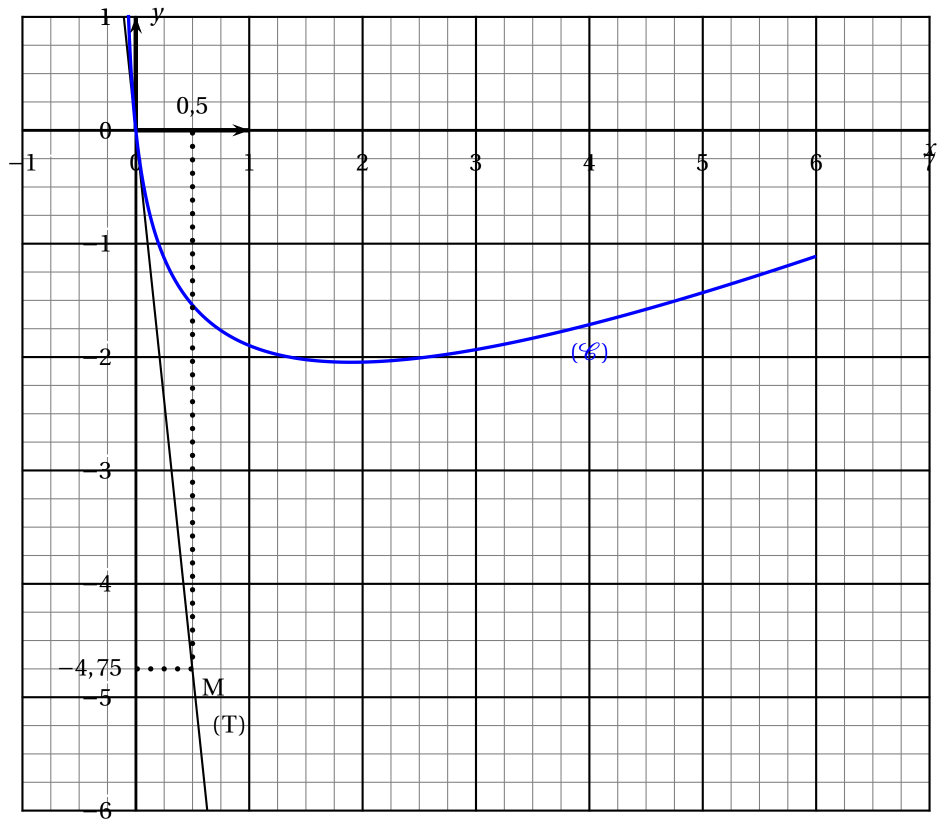
a. Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

b. Calculer l'intégrale $\text{J} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$. On donnera la valeur exacte.

c. On considère dans le repère défini initialement, l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que : $\left\{\begin{array}{lllll} 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1\\ f(x) & \leqslant & y & \leqslant & 0\end{array}\right.$

Utiliser la question précédente pour déterminer l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 de cette région. On en donnera la valeur décimale arrondie à 10^{-2} près.

Annexe (problème)



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie électronique ∾

génie électrotechnique, optique
Métropole septembre 2006

EXERCICE 1 **5 points**

j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $(1-2\text{i})z = (1-\text{i})z - 1 - \text{i}$.
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm, on considère les points A, B et D tels que :
   — A est le point d'affixe $z_\text{A} = 1 - \text{i}$,
   — B est l'image du point A par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$;
   — D est le symétrique du point A par rapport à O.

   a. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

   b. Calculer le module et un argument de l'affixe z_A du point A.

   c. Déterminer la forme algébrique de l'affixe z_D du point D. Justifier.

   d. Calculer le module et un argument du nombre complexe z_B affixe du point B.

   e. Justifier que le triangle AOB est équilatéral, en déduire la valeur de la distance AB.
3. On note C l'image de B par la translation T de vecteur d'affixe $-1+\text{i}$.

   a. Établir l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\text{AD}} = 2\overrightarrow{\text{BC}}$.

   b. Démontrer que le quadrilatère OBCD est un parallélogramme.

   c. Prouver que CD = AB.

   d. En déduire que le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

EXERCICE 2 **4 points**

Un joueur lance successivement et dans cet ordre trois pièces de monnaie : une de 2 euros et deux de 1 euro.

1. Déterminer les différents résultats possibles, sachant qu'un résultat peut être considéré comme un triplet du type (P, F, P) par exemple, P désignant pile et F désignant face.
   Chaque pièce est parfaitement équilibrée. On est dans une situation d'équiprobabilité.
2. Si les trois pièces présentent leur côté face, le joueur perd 5 euros : sinon il gagne la somme des euros figurant sur les pièces présentant leur côté pile.
   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer des trois pièces, associe la somme d'argent gagnée en euros. Lorsque le joueur perd, la variable X prend alors une valeur négative.

   a. Quelles valeurs peut prendre X ?

   b. Donner la loi de probabilité de X.

   c. Calculer la probabilité de l'évènement « $X \leqslant 2$ ».
3. On dit qu'un jeu est équitable lorsque l'espérance mathématique du gain est égale à 0.

   a. Ce jeu est-il équitable ?

b. Quelle somme le joueur devrait-il perdre lorsque les trois pièces présentent leur côté face pour que ce jeu soit équitable ?

PROBLÈME **11 points**

Partie A : Détermination d'une fonction

Soit f une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan et f' la fonction dérivée de f.

On sait de plus que :

- la droite Δ d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$;
- la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A(0 ; 4)
- la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer les nombres réels suivants en justifiant la réponse donnée :

a. $f(0)$ **b.** $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$ **c.** $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2. On admet que, pour tout réel x, $f(x) = a + (bx + c)\text{e}^{2x}$ où a, b et c sont trois constantes réelles.

a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (2bx + b + 2c)\text{e}^{2x}$.

b. Exprimer en fonction de a, b et c les nombres réels suivants :
$f(0)$; $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$; $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ (on admet que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x\text{e}^{2x} = 0$).

3. a. Déduire des questions précédentes que les réels a, b et c sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a + c & = & 4 \\ \dfrac{3}{2}b + 2c & = & 0 \\ a & = & 1 \end{array}\right.$$

4. Résoudre ce système et donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie B : étude et représentation d'une fonction

On admet que f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + (-4x + 3)\text{e}^{2x}.$$

C_f est la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. On rappelle que la droite Δ d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.
étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

2. a. Calculer $f'(x)$, f' étant la fonction dérivée de la fonction f.

b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et établir son tableau de variations.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4} ; 1\right]$.

b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4. En utilisant les résultats précédents, construire sur la feuille de papier millimétré, la droite δ puis la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie C : calcul d'une aire

On considère les fonctions h et H définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (-4x+3)\mathrm{e}^{2x} \text{ et } H(x) = \left(-2x+\frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}.$$

1. Vérifier que la fonction H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

2. On appelle $\mathcal{D}$ la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_f$,la droite Δ d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

a. Hachurer $\mathcal{D}$ sur le graphique.

b. Calculer la valeur exacte de la mesure, en cm^2, de l'aire $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$ puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI novembre 2006 Nouvelle-Calédonie
Génie électronique, électrotechnique, optique

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 **6 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$(unité graphique : 1 cm).

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 4z\sqrt{3} + 16 = 0.$$

2. Soient A et B les points d'affixes respectives : $z_A = 2\sqrt{3} - 2i$ et $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$.

a. Calculer le module et un argument de z_A et de z_B.

b. Construire avec précision les points A et B dans le plan en laissant les traits de construction apparents.

c. Donner le module et un argument de $\dfrac{z_B}{z_A}$.

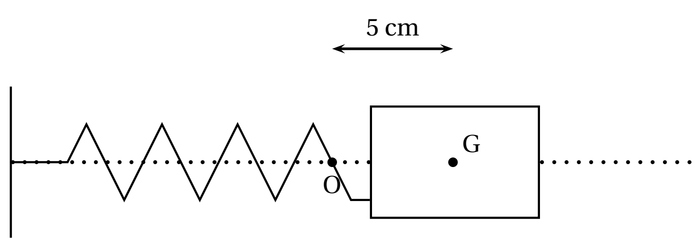
d. Donner une mesure en radians de l'angle de la rotation de centre O, qui transforme A en B.

3. a. Soit C le symétrique de A par rapport à O. Déterminer l'affixe z_C du point C et placer le point C dans le plan.

b. $t_{\vec{w}}$ désigne la translation de vecteur $\vec{w} = -4\sqrt{3}\,\vec{u}$. Soit D l'image de A par la translation $t_{\vec{w}}$. Déterminer son affixe z_D et placer D.

4. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **4 points**



On s'intéresse au mouvement d'un mobile qui se déplace sur un axe horizontal en étant fixé à un ressort.
L'axe est muni d'un repère $\left(O ; \vec{\imath}\right)$ l'unité étant le cm.
G désigne le centre d'inertie. À l'équilibre G et O sont confondus. On tire de 5 cm vers la droite le mobile et on lâche.
On appelle $f(t)$ la position du mobile sur l'axe à l'instant t exprimé en secondes. Ainsi $f(0) = 5$.
On rappelle que la vitesse du mobile à l'instant t est $f'(t)$ (donc $f'(0) = 0$).
Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. On suppose, dans cette question uniquement, qu'il n'y a pas de frottements sur l'axe. On admettra dans ce cas, que la fonction f vérifie l'équation différentielle suivante : (E) :

$$y'' + 2y = 0.$$

a. Résoudre l'équation différentielle (E).

b. Déterminer la solution de (E) vérifiant $f(0) = 5$ et $f'(0) = 0$.

2. Dans cette question, on suppose qu'il y a des frottements sur l'axe.
On admet dans ce cas que pour $t \geqslant 0$, on a : $f(t) = 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.

a. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $-5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t} \leqslant f(t) \leqslant 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$.

b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
Quel est le comportement du mobile pour t assez grand ?

PROBLÈME **10 points**

Le but du problème est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{1 + 2\ln(x)}{x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ orthonormal (unité graphique : 2 cm)

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - 2\ln(x)$.

1. a. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction g (aucune limite n'est demandée).

2. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B : étude de la fonction f

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$?

b. Vérifier que pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + 2\dfrac{\ln(x)}{x}$ et en déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. a. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

b. Pour x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, étudier le signe de $\dfrac{1 + 2\ln(x)}{x}$ et en déduire la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (Δ).

3. a. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

b. En utilisant les résultats de la partie A, dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Soit A le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse 1.
Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ en A.

5. Tracer la droite (Δ), la tangente (T) et la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie C : calculs d'aire

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(x) + [\ln(x)]^2.$$

Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. Soit $(\mathscr{D})$ la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

a. Hachurer $(\mathscr{D})$ sur la figure.

b. Calculer la valeur exacte de l'aire de $(\mathscr{D})$ exprimée en cm^2.

Baccalauréat STI Antilles-Guyane juin 2006
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 2z + 4 = 0$$

   On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive, z_2 celle dont la partie imaginaire est négative.

   b. Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2.

   c. Soit $z_3 = \dfrac{4z_2}{z_1}$. Donner la forme algébrique de z_3.

2. Soit A, B et C les points du plan complexe d'affixes respectives : $z_\text{A} = 1 + \text{i}\sqrt{3}$; $z_\text{B} = 1 - \text{i}\sqrt{3}$; $z_\text{C} = -2 - 2\text{i}\sqrt{3}$.

   a. Placer les points A, B, C.

   b. Justifier que les points O, C et A sont alignés.

   c. Démontrer que le triangle ABC est isocèle de sommet principal B.

   d. Soit D le point du plan tel que ABCD soit un parallélogramme. Calculer l'affixe du point D.

   e. Démonter que les droites (OA) et (BD) sont perpendiculaires.

EXERCICE 2 **6 points**

Une entreprise fabrique des pièces mécaniques cylindriques de longueur L et de diamètre D.

1. On prélève un lot de 1 000 pièces dans la production. On constate que :
   — 40 pièces ont une longueur non conforme ;
   — 30 pièces ont un diamètre non conforme ;
   — 10 pièces ont une longueur et un diamètre non conformes.

   a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre de pièces	ayant une longueur conforme	ayant une longueur non conforme	Total
au diamètre conforme			
au diamètre non conforme			
Total			1000

   b. Dans le lot de 1 000 pièces, quel est le nombre de pièces conformes, c'est-à -dire ayant une longueur conforme et un diamètre conforme ?

   c. On choisit une pièce au hasard parmi les 1 000 pièces du lot précédent.

   d. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   — D_1 : « la pièce a une longueur non conforme » ;
   — D_2 : « la pièce a un diamètre non conforme ».

   e. Définir par une phrase l'évènement $D = D_1 \cup D_2$. Calculer sa probabilité.

   f. On choisit une pièce ayant une longueur conforme. Calculer à 10^{-3}, la probabilité que son diamètre soit conforme.

2. On admet que dans cette partie la proportion de pièces fabriquées ayant une dimension non conforme est égale à 6 %. L'entreprise possède une machine de contrôle destinée à rejeter les pièces ayant une dimension non conforme. Des tests ont montrés que cette machine accepte toutes les pièces conformes mais ne rejette que 75 % des pièces non conformes.

   a. On considère le même lot de 1 000 pièces fabriquées. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Pièces conformes	Pièces conformes	Total
Pièces acceptées			
Pièces rejetées	0		
Total			1 000

   b. Le coût de fabrication d'une pièce (conforme ou non conforme) est de 15 euros. Son prix de vente est de 25 euros.

   Une pièce conforme rapporte donc 10 euros et une pièce non conforme rejetée coûte 15 euros à l'entreprise.

   On admettra qu'une pièce non conforme non rejetée est vendue 25 €, puis remplacée avec un coût supplémentaire pour l'entreprise de 30 €.

   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce choisie au hasard dans le lot de 1 000 pièces, associe le gain (positif ou négatif) correspondant pour l'entreprise.

   i. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

   ii. Donner, sous forme de tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   iii. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de cette variable aléatoire.

   En admettant que le lot étudié dans cet exercice soit représentatif de la production de l'entreprise, que représente $E(X)$ pour l'entreprise ?

PROBLÈME 10 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2 + (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On prendra pour unité graphique : 2 cm.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. **a.** En utilisant la forme développée $f(x) = 2 + x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. En déduire l'existence d'une asymptote Δ à la courbe $\mathscr{C}$ et donner une équation de cette asymptote.
   Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à celle de son asymptote Δ

   a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x, $f'(x) = 0$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. On appelle T la tangente à la courbe en son point d'abscisse -1.
   Déterminer une équation de la droite T.
4. **a.** Sachant que $2 < \mathrm{e} < 3$, justifier que $f(-2) < 0$.

   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\,;\,0]$.

c. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α au centième près par excès.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et les droites Δ et T dans le plan muni du repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie B : Calcul d'une aire

1. Soit F, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = 2x - (x+2)\text{e}^{-x}.$$

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f.

2. Soit $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$, α étant la valeur trouvée à la question 4. de la partie A.

a. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique obtenu à la question 6 de la partie A.

b. Calculer, en fonction de α, la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$.

c. En utilisant la valeur approchée de α déterminée dans la question A 5. c., donner une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI La Réunion juin 2006 ∾
Génie des matériaux, génie mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **4 points**

Partie A

On désigne par (E) l'équation différentielle : $2y' + y = 0$ où y est une fonction numérique définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que $f(0) = 0,5$.

Partie B

La direction d'un musée vient de faire l'acquisition d'une nouvelle statue et elle souhaite réaliser un socle en bois pour y déposer celle-ci. On appelle V le volume de ce socle dont la forme est donnée sur la feuille annexe jointe.
Le socle est constitué de deux parties.

1. La première partie est un cylindre de révolution de $0,50$ m de rayon et de $0,50$ m de hauteur. Calculer la valeur exacte, en m^3, du volume V_1 de cette première partie.
2. Le volume V_2 de la deuxième partie est celui du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f d'équation
$y = 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 0,5$.
On précise que la valeur exacte, en m^3, de ce volume est donnée par la formule :
$$V_2 = \pi \int_0^{0,5} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$
   a. Calculer V_2.
   b. En déduire que la valeur exacte, en m^3, du volume du socle est :
$$V = \frac{\pi\left(3 - 2\mathrm{e}^{-0,5}\right)}{8}.$$
   c. Donner la valeur arrondie du volume V à 10^{-3} près.

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :
$$\mathrm{i}z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}.$$
Exprimer la solution sous forme algébrique.
2. Soit A le point d'affixe z_A défini par $z_A = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   a. Déterminer le module et un argument de z_A.

   b. En déduire que l'écriture algébrique de z_A est $1 + i\sqrt{3}$.

3. On désigne par B et C les points dont les affixes z_B et z_C sont définies par :

$$z_B = -z_A \quad \text{et} \quad z_C = z_A^2.$$

   a. Écrire z_B et z_C sous forme algébrique.

   b. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

   c. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

4. On note D le point d'affixe z_D définie par $z_D = \dfrac{4}{z_A}$.

   Montrer que $z_D = \overline{z_A}$ où $\overline{z_A}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_A.

5. On note E le point de la droite (AC) dont l'affixe z_E est un nombre réel. Calculer z_E.

PROBLÈME **11 points**

On note I l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie A

Soient a et b deux nombres réels.
On considère la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de I, par :

$$f(x) = x^2 + ax + b - 2\ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm). Soit A le point de coordonnées $(1\,;\,-3)$.
Calculer les valeurs respectives des nombres réels a et b pour que, d'une part la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A et que, d'autre part, la tangente à cette courbe au point A admette un coefficient directeur égal à 0.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on étudiera la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de I, par :

$$f(x) = x^2 - 4 - 2\ln x.$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0.

   b. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel x de I, on a $f(x) = x\left(x - \dfrac{4}{x} - 2\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

   b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f puis montrer que, pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

4. Étudier le signe de la fonction f' sur I et dresser le tableau de variations de la fonction f sur I.

5. Déterminer le signe de $f(x)$ quand le nombre réel x appartient à l'intervalle $[1\,;\,2]$.

6. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie C

Soit H la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de I, par :

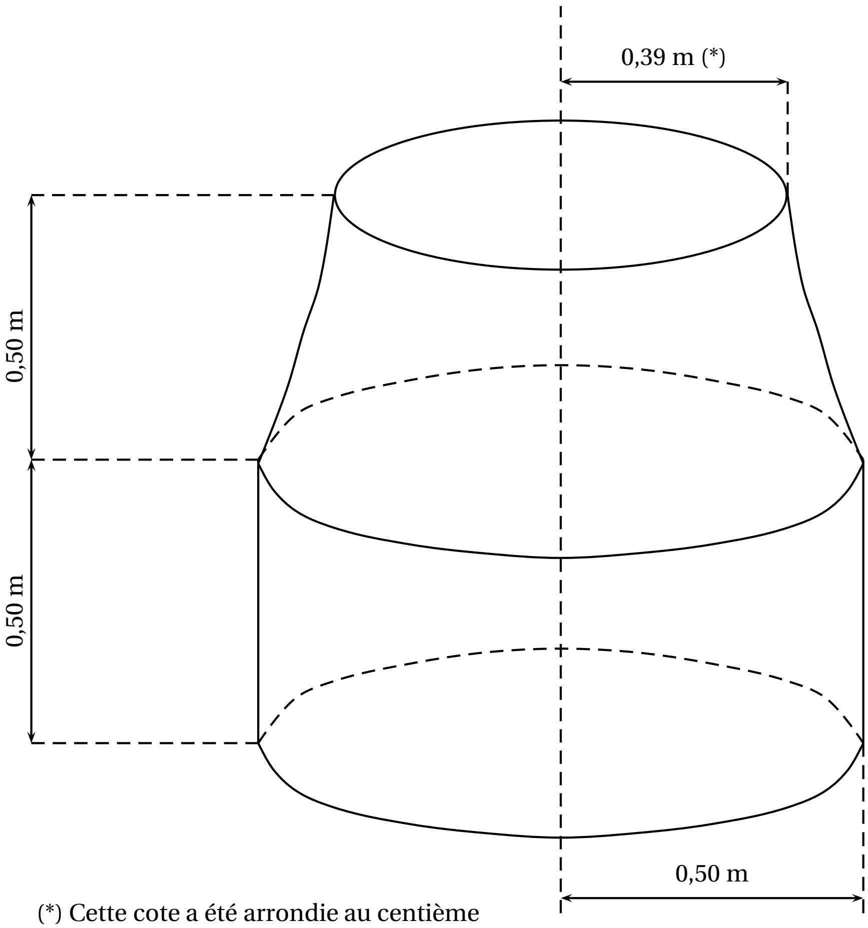
$$H(x) = x\ln x - x.$$

1. Calculer $H'(x)$ où H' désigne la fonction dérivée de H.

2. En déduire une primitive F de la fonction f sur I.

3. On appelle Δ la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Hachurer Δ. Calculer la valeur exacte de l'aire de Δ en unités d'aire, puis en cm^2.

Annexe de l'exercice 1



(*) Cette cote a été arrondie au centième

Baccalauréat STI Métropole juin 2006
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$(z-4)\left(z^2+4z+16\right)=0.$$

2. Soient les nombres complexes suivants :

$$z_1=4 \qquad z_2=-2-2\text{i}\sqrt{3} \qquad z_3=-2+2\text{i}\sqrt{3} \qquad z_4=8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} \qquad z_5=2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$$

   a. Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1, z_2, z_3.

   b. Donner les formes algébriques de z_4 et de z_5.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. Soient les points A, B, C, D et E d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5.

   a. Placer les points A , B , C , D et E dans le repère indiqué.

   b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$\pi^2 y+9y''=0,$$

où y est une fonction de la variable réelle x et y'' sa dérivée seconde.

1. Soit g la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par :

$$g(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)+4\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right).$$

   Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E).

2. **a.** Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E).

   b. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie :

$$f(0)=1 \quad \text{et} \quad f'(0)=\frac{\pi}{3}.$$

   c. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{4}\right).$$

   d. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,3]$ l'équation $f(x)=1$.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels l'équation $2X^2-5X+2=0$.

2. En déduire les solutions, sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, de l'équation
$2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$.
On pourra poser $X = \ln x$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2.$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Limites aux bornes
   a. Étudier la limite de f en 0. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra factoriser par $\ln x$).
2. Variations
   a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$,
   $f'(x) = \dfrac{4\ln x - 5}{x}$.
   b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   c. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. On pourra remarquer que la fonction f s'annule en $\sqrt{\text{e}}$ et en e^2.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\sqrt{\text{e}}$.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T dans le repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
5. Calcul d'une aire
   a. Hachurer le domaine $\mathscr{A}$ du plan situé en dessous de l'axe (Ox) et compris entre la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe (Ox).
   b. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par
   $F(x) = x\left[2(\ln x)^2 - 9\ln x + 11\right]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine $\mathscr{A}$. En donner l'arrondi à 10^{-2}.

∽ Baccalauréat STI Métropole septembre 2006 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 + 2z\sqrt{3} + 4 = 0$$

On note z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive, z_2 la solution dont la partie imaginaire est négative.

2. **a.** Déterminer le module et un argument de z_1 puis de z_2.

b. En déduire le module et un argument de z_1^2 puis de z_2^2.

c. Donner les formes algébriques des nombres complexes z_1^2 et z_2^2.

3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

a. Placer les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} + \text{i}$,
$z_B = -\sqrt{3} - \text{i}$, $z_C = 2 - 2\text{i}\sqrt{3}$ et $z_D = 2 + 2\text{i}\sqrt{3}$.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

Une entreprise produit des rondelles métalliques. Ces rondelles peuvent présenter deux défauts :
- un défaut de diamètre,
- un défaut d'épaisseur.

Le pourcentage des pièces présentant un défaut de diamètre est de 6 %. Celui des pièces présentant un défaut d'épaisseur est de 8 %. Le pourcentage des pièces présentant les deux défauts est de 5 %.

1. Recopier et compléter le tableau suivant en indiquant dans chaque case le pourcentage correspondant :

	Avec le défaut de diamètre	Sans le défaut de diamètre	Total
Avec le défaut d'épaisseur			
Sans le défaut d'épaisseur			
Total	6 %		100 %

2. Une pièce est choisie au hasard dans la production. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies. Montrer que la probabilité p_1 de présenter un défaut d'épaisseur et pas de défaut de diamètre est égale à 3 %.

3. Une pièce est choisie au hasard parmi les pièces présentant un défaut de diamètre. Quelle est la probabilité p_2 qu'elle présente un défaut d'épaisseur ?

4. Soit X la variable aléatoire qui à toute pièce de cette production prise au hasard associe le nombre de défauts observés sur celle-ci.

a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

b. Donner sous la forme d'un tableau la loi de la variable aléatoire X.

c. Calculer $\text{E}(X)$, l'espérance mathématique de la variable aléatoire X (on détaillera les calculs effectués).

PROBLÈME **10 points**

Partie I : étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 5 cm.

1. Étudier la parité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   En déduire une propriété géométrique de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis en $-\infty$.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f'(x)$.
4. Étudier le signe de $(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})$ sur $\mathbb{R}$.
   En déduire le signe de $f(x)$.
5. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
6. Sur une feuille de papier millimétré, et en utilisant le repère indiqué, construire la portion de la courbe $\mathscr{C}$ dont les abscisses appartiennent à l'intervalle $[-2\,;\,2]$.
   Placer les points A et B de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives -1 et 1.
   On rappelle que l'unité graphique est 5 cm.

Partie II : étude de la longueur d'un arc de la courbe

On appelle ℓ la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ de la courbe $\mathscr{C}$.

1. Déterminer les coordonnées du point E d'abscisse 0 de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Calculer, en centimètre, les valeurs exactes des longueurs AE et EB.
   En déduire qu'une valeur arrondie à 10^{-2} de (AE + EB) est égale à 11,38 cm.
3. On admet que la longueur ℓ de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ est donnée en centimètre par la formule suivante :

$$\ell = 5 \times \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

   a. Montrer que $1 + [f'(x)]^2 = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2$.

   b. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.

   c. En déduire la valeur exacte de la longueur de cet arc. Quelle est l'erreur commise en prenant (AE + EB) comme valeur approchée de ℓ ?