Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2002
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Une association propose chaque jour un spectacle au prix de 20 €. Pour en assurer la promotion, chaque client, à l'entrée, lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Les six résultats sont équiprobables :

- si le résultat est 6, l'entrée est gratuite ;
- si le résultat est 1, l'entrée est demi-tarif (10 €) ;
- dans les autres cas (2, 3, 4 ou 5), le client paie plein tarif (20 €).

Partie A

Un client se présente à l'entrée. Soit A l'évènement : « le client paie plein tarif ».

1. Déterminer la probabilité de A.
2. Énoncer par une phrase en français l'évènement contraire de A noté $\overline{A}$ puis déterminer la probabilité de $\overline{A}$.

Partie B

1. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat du dé, le prix payé par le client.
   a. Déterminer à l'aide d'un tableau de loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$.
2. Avant promotion, le prix unique était 20 € et l'association avait en moyenne 80 clients par jour. Depuis la promotion, la clientèle a augmenté de 40 %.
   En utilisant la question précédente, indiquer si l'association peut espérer de meilleures recettes grâce à la promotion.

EXERCICE 2 **6 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
$$z^2 + 8z + 17 = 0.$$
2. Soit $P(z) = z^3 + 2z^2 - 31z - 102$.
   Vérifier que $P(z) = (z-6)\left(z^2 + 8z + 17\right)$.
3. Utiliser les questions **1.** et **2.** pour résoudre sans calcul supplémentaire l'équation suivante dans $\mathbb{C}$:
$$z^3 + 2z^2 - 31z - 102 = 0.$$

Partie B

1. **a.** Placer les points A, B et B′ d'affixes respectives :

$$6 \qquad , \qquad -4+\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad -4-\mathrm{i}$$

b. Pourquoi a-t-on OB = OB$'$?

c. Mettre sous forme algébrique $\dfrac{-4+\mathrm{i}}{-4-\mathrm{i}}$.

d. Quel est le module de $\dfrac{-4+\mathrm{i}}{-4-\mathrm{i}}$?

Déterminer à l'aide de la calculatrice, un argument de $\dfrac{-4+\mathrm{i}}{-4-\mathrm{i}}$ (on donnera l'arrondi à 10^{-2} près).

e. Déduire des questions b. et d., les mesures en degrés des angles du triangle ODB$'$. (On donnera les arrondis a l'unité).

2. Soit Ω le point d'affixe $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

a. Construire les points C et D, symétriques des points A et B par rapport à Ω.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

PROBLÈME — **9 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x)=x^3+x^2+x+1.$$

1. Calculer $g(-1)$; déterminer les nombres réels a et b tels que

$$g(x)=(x+1)\left(x^2+ax+b\right).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x)\geqslant 0$.

Partie B

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\left(x^3-2x^2+5x-4\right)\mathrm{e}^x.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier le limite de f en $+\infty$: on remarquera que, pour $x\neq 0$:

$$f(x)=x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)\mathrm{e}^x.$$

2. Étudier la limite de f en $+\infty$ On admettra que, pour n entier naturel :

$$\lim_{x\to 0} x^n\mathrm{e}^x=0.$$

En déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}$.

3. Déterminer la dérivée f' de f. Vérifier que $f'(x)=g(x)\mathrm{e}^x$.

4. Étudier les variations de f à l'aide de la partie A puis dresser le tableau de variations de f où figurera la valeur exacte du minimum de f.

5. Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide de la calculatrice en donnant les arrondis de $f(x)$ à 10^{-1} près.

x	-10	-5	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$											

6. Calculer $f'(1)$; en donner l'arrondi à 10^{-1} près : puis tracer la tangente (T) à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
7. Tracer $\mathcal{C}$.

Partie C

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \left(x^3 - 5x + 15x - 19\right) \mathrm{e}^x.$$

1. Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer en cm^2 l'aire de la portion de plan limitée par $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$.
   En donner l'arrondi à 10^{-1} près.