

⌘ Baccalauréat STI Métropole septembre 2008 ⌘
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1

5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.
 On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z + 8 = 0.$$

2. On considère les points A, B et C du plan d'affixes respectives :

$$z_A = 2 - 2i \quad ; \quad z_B = 2 + 2i \quad \text{et} \quad z_C = 4.$$

Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

3. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_A et z_B .
4. a. Écrire z_A et z_B sous la forme $re^{i\theta}$, où r est un réel strictement positif et θ un réel compris entre $-\pi$ et π .
- b. Montrer que le point B est l'image du point A par une rotation de centre O et d'angle que l'on précisera.
5. Démontrer que le triangle OAB est isocèle rectangle.
6. Déterminer la nature du quadrilatère OACB.

EXERCICE 2

5 points

Une entreprise fabriquant des ordinateurs les vend en ligne sur internet. Ces appareils sont tous garantis un an gratuitement.

Le fabricant propose en option une extension de garantie payante de deux ans, au delà de cette première année gratuite.

1. Une étude est faite sur un échantillon de 1 000 ordinateurs vendus par ce fabricant. Elle montre que :
- 10 ordinateurs ont nécessité une ou plusieurs réparations au cours de la deuxième année (on note ce cas R_2) ;
 - au cours de la troisième année, 20 ordinateurs ont nécessité une ou plusieurs réparation (on note ce cas R_3) dont un qui avait déjà été réparé l'année précédente.

Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre d'ordinateurs	R_3 se produit	R_3 ne se produit pas	Total
R_2 se produit			
R_2 ne se produit pas			
Total			

On admet que la répartition précédente modélise ce qui se produit pour l'ensemble des ordinateurs vendus par ce fabricant.

2. Selon les chiffres du fabricant :
- pour chaque ordinateur vendu sans extension de garantie et tombé en panne une ou plusieurs fois la deuxième année, le coût moyen de réparation pour l'acheteur au cours de cette deuxième année est 150 €.

- pour chaque ordinateur vendu sans extension de garantie et tombé en panne une ou plusieurs fois la troisième année, le coût moyen de réparation pour l'acheteur au cours de cette troisième année est 200 €.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque ordinateur vendu sans extension de garantie par ce fabricant, associe le coût total moyen des réparations, pour l'acheteur, au terme des trois premières années. Ce coût est exprimé en euros.

Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont donc 0, 150, 200, 350.

- Justifier que la probabilité de l'évènement ($X = 0$) est égale à 0,971.
 - Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 - Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .
3. Le fabricant propose l'extension de garantie payante de deux ans à un prix de 50 €. Que peut-on en dire?

PROBLÈME

10 points

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 5y = 5x^3 + 3x^2 + 5,$$

où y représente une fonction de la variable x , définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels.

- Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + 5y = 0$.
- Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction u , définie sur \mathbb{R} par $u(x) = ax^3 + b$, soit solution de l'équation différentielle (E).
- Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = ke^{-5x} + x^3 + 1$ où k est un nombre réel.
 - Vérifier que h est solution de l'équation (E).
 - Déterminer le réel k tel $h(0) = -2$.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -3e^{-5x} + x^3 + 1.$$

- Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
 - Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
 - En déduire le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} et dresser son tableau de variations.
- Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
 - Établir que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; 1]$.
 - Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre réel α .
 - Déterminer selon les valeurs du réel x , le signe de $f(x)$.

Partie C : Courbe représentative de la fonction f

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 8 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par : $u(x) = x^3 + 1$.

La représentation graphique Γ de la fonction u , dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est tracée sur la feuille jointe en annexe.

- a. On pose, pour tout réel x , $d(x) = f(x) - u(x)$.

Étudier le signe de $d(x)$.

- b. En déduire la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la courbe Γ .

2. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous. On donnera dans chaque cas la valeur décimale arrondie au centième de $f(x)$.

x	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
$f(x)$								

3. Tracer la courbe \mathcal{C} dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie.

Partie D : Calcul d'une aire

On appelle \mathcal{P} la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

1. Hachurer sur la feuille annexe la partie \mathcal{P} du plan.
2. Calculer la mesure, en unités d'aire, de l'aire \mathcal{A} de la partie \mathcal{P} du plan.

Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, figurant sur la copie sera prise en compte dans l'évaluation.

**FEUILLE ANNEXE DU PROBLÈME
À REMETTRE AVEC LA COPIE**

