Baccalauréat STL Métropole 20 juin 2012
Physique de laboratoire et de procédés industriels

Durée de l'épreuve : 4 heures | Coefficient : 4

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

I. On considère l'équation : $z^2 - 4\sqrt{2}z + 16 = 0$.

Résoudre cette équation dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

II. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 4,\quad z_{\text{B}} = 2\sqrt{2} + 2\text{i}\sqrt{2},\quad z_{\text{C}} = 2 + 2\text{i}\quad \text{et } z_{\text{D}} = 1 - 3\text{i}.$$

1. **a.** Déterminer le module et un argument des nombres $z_{\text{A}}, z_{\text{B}}$ et z_{C} puis donner leur expression sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$, $r > 0$.

   b. Placer les points A, B, C et D dans le repère.
2. Démontrer que les points O, B et C sont alignés.
3. Quelle est la nature du triangle ACD ? Justifier la réponse.
4. Déterminer l'affixe du point E tel que ACDE soit un parallélogramme. Placer E.
5. **a.** Démontrer que B est l'image de A par une rotation r de centre O dont on déterminera l'angle.

   b. Calculer l'affixe du point B′, image de B par r (on donnera le résultat sous forme algébrique). Placer le point B′.

EXERCICE 2 **5 points**

Une entreprise commercialise un appareil électrique. Un client qui achète cet appareil peut l'emporter immédiatement, ou se faire livrer à domicile.

Dans le cas de la livraison, deux services sont proposés aux clients :

- livraison simple
- livraison avec mise en service

Le prix de l'appareil en magasin est de 120 €.
En cas de livraison, les tarifs des services supplémentaires sont les suivants :

— frais de livraison :	15 euros pour une livraison à une distance inférieure ou égale à 50 km 25 euros pour une livraison à une distance supérieure à 50 km
— frais de mise en service :	20 euros

Une étude a été réalisée sur un lot de 1 000 appareils vendus. Le tableau suivant indique la répartition des effectifs, en fonction des choix des clients et des distances de livraison :

	Emporté	Livré de 0 à 50 km	Livré à plus de 50 km	TOTAL
Sans mise en service	550	100	50	700
Avec mise en service		200	100	300
	550	300	150	1 000

1. **a.** Calculer la probabilité p_1 qu'un appareil choisi au hasard dans ce lot, ait été livré avec mise en service.

   b. Calculer la probabilité p_2 qu'un appareil choisi au hasard dans ce lot, ait été livré.

2. Soit F la variable aléatoire égale au montant facturé pour un appareil.

   a. Donner les cinq valeurs prises par la variable aléatoire F. (Par exemple, pour un appareil livré à moins de 50 km avec mise en service, F prend la valeur 155).

   b. Déterminer la loi de probabilité de F.

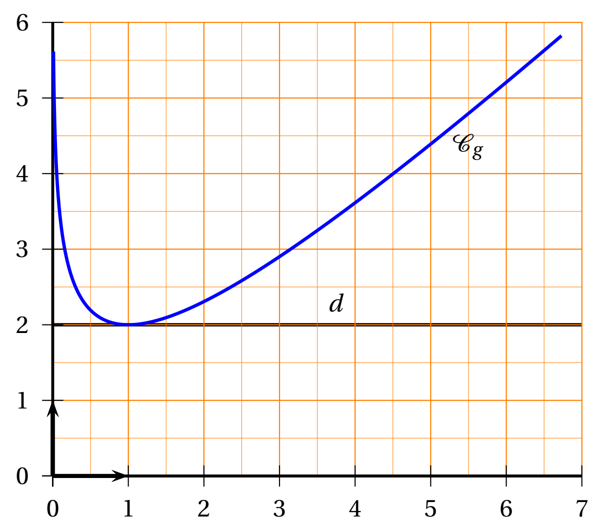
   c. Calculer son espérance mathématique.

   d. Interpréter ce résultat.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : utilisation d'un graphique

Dans le repère orthonormé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_g$ est la représentation graphique d'une fonction g, définie sur $]0~;~-\infty[$, que l'on se propose de déterminer. La droite d est tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 et l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_g$.



1. Donner, en utilisant le graphique :

   a. le minimum de la fonction g sur $]0~;~+\infty[$ et la valeur en laquelle il est atteint.

   b. le signe de la fonction g sur $]0~;~+\infty[$.

   c. la limite de g en 0.

2. Expliquer pourquoi $g'(1) = 0$.

   On admet que la fonction g a pour expression : $g(x) = ax + b - \ln x$ où a et b sont des nombres réels que l'on souhaite déterminer.

   En utilisant les résultats des questions 1. a. et 2. déterminer les valeurs de a et b et en déduire que :

$$g(x) = x + 1 - \ln x.$$

Partie B : étude de la fonction f

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x + \frac{\ln x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. En remarquant que $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln x$, déterminer la limite de la fonction f en 0.

   Interpréter graphiquement le résultat.

2. **a.** Calculer la dérivée f' de la fonction f et vérifier que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

   b. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Vérifier que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$:

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln x}{x}$$

   b. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

5. Tracer la droite T et la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ sur une feuille de papier millimétré.

Partie C : détermination d'une aire

1. On appelle $\mathscr{A}$ la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

   Hachurer $\mathscr{A}$ sur le graphique précédent.

2. On considère la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$F(x) = x\ln x - x + \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

   Démontrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. Déterminer la valeur de l'aire de la partie $\mathscr{A}$ du plan, exprimée en unités d'aire, puis en cm^2 ?