Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2009 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On prend 1 cm comme unité.

Partie A — Restitution organisée de connaissances

Soit D le point de coordonnées (x_{D}, y_{D}, z_{D}) et P le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$, où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls.
Démontrer que la distance du point D au plan P est donnée par :

$$d(\text{D},P)=\frac{\left|ax_{\text{D}}+by_{\text{D}}+cz_{\text{D}}+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Partie B

On considère les points A de coordonnées (3 ; −2 ; 2), B de coordonnées (6 ; −2 ; −1), C de coordonnées (6 ; 1 ; 5) et D de coordonnées (4 ; 0 ; −1).

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
   En déduire l'aire du triangle ABC.
2. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; −2 ; 1) est normal au plan (ABC).
   Déterminer une équation du plan (ABC).
3. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
   Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

Partie C

Soit Q le plan d'équation $x-2y+z-5=0$.

1. Déterminer la position relative des deux plans Q et (ABC).
2. Q coupe les droites (DA), (DB) et (DC) respectivement en E, F et G.
   Déterminer les coordonnées de E et montrer que E appartient au segment [DA].
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer le volume du tétraèdre EFGD.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (−2) et on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe

$$z'=\frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}.$$

1. **a.** Déterminer l'affixe du point P′ image par f du point P d'affixe $(1+\text{i})$.
   b. Montrer que les droites (AP) et (BP′) sont parallèles.
   c. Établir que les droites (AP) et (PP′) sont perpendiculaires.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f (c'est-à-dire l'ensemble des points tels que $M' = M$).

On cherche à généraliser les propriétés **1. b** et **1. c** pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque du plan.

3. **a.** Montrer que pour tout nombre complexe z, le nombre $(z-2)\left(\overline{z}-2\right)$ est réel.
   b. En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel.
   c. Montrer que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB). Généraliser les résultats de la question **1.c**.
5. Soit M un point distinct de A. Déduire des questions précédentes une construction du point M' image de M par f. Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3-2\text{i}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère un carré direct ABCD (c'est à dire un carré ABCD tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]\Big)$ de centre I.

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [DA].
Γ_1 désigne le cercle de diamètre [AI] et Γ_2 désigne le cercle de diamètre [BK].

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que $s(\text{A}) = \text{I}$ et $s(\text{B}) = \text{K}$.
2. Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s.
3. **a.** Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par s.
   b. Soit E l'image par s du point I. Démontrer que E est le milieu du segment [ID].
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que les points A, Ω et E sont alignés.
   (On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$).

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(\text{A}\ ;\ \dfrac{1}{10}\overrightarrow{\text{AB}}\ ;\ \dfrac{1}{10}\overrightarrow{\text{AD}}\right)$.

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.
2. Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe

$$z' = \frac{\text{i}}{2}z + 5 + 5\text{i}.$$

3. Calculer l'affixe ω du centre Ω de s.
4. Calculer l'affixe z_{E} du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.
5. Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\text{e}^{-x}}{2-x}\right)\,\text{d}x$$

1. **a.** Étudier les variations de la fonction $f\ : x \longmapsto f(x) = \dfrac{\text{e}^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

   b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on a $\dfrac{1}{\text{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. Soit J et K les intégrales définies par $J = \displaystyle\int_0^1 (2+x)\text{e}^{-x}\,\text{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,\text{d}x$.

   a. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que $J = 3 - \dfrac{4}{\text{e}}$.

   b. Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que $\dfrac{1}{3\text{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$.

   c. Démontrer que $J + K = 4I$.

   d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot « $BBAAC$ » signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. **a.** Combien y-a-t'il de mots-réponses possibles à ce questionnaire ?

   b. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

   Calculer la probabilité des évènements suivants :

   E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».

F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».

G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « $BACAB$ » est un palindrome).

2. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et
$p = \dfrac{32}{243}$.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.