

∞ Baccalauréat S Amérique du Nord 27 mai 2011 ∞

EXERCICE 1

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points A et B d'affixes respectives :  $a = i$  et  $b = 1 + i$ .

On note :  $r_A$  la rotation de centre A, d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ,  $r_B$  la rotation de centre B, d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $r_O$  la rotation de centre O, d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

Partie A

On considère le point C d'affixe  $c = 3i$ . On appelle D l'image de C par  $r_A$ , G l'image de D par  $r_B$  et H l'image de C par  $r_O$ .

On note  $d, g$  et  $h$  les affixes respectives des points D, G et H.

1. Démontrer que  $d = -2 + i$ .
2. Déterminer  $g$  et  $h$ .
3. Démontrer que le quadrilatère CDGH est un rectangle.

Partie B

On considère un point M, distinct de O et de A, d'affixe  $m$ . On appelle N l'image de M par  $r_A$ , P l'image de N par  $r_B$  et Q l'image de M par  $r_O$ .

On note  $n, p$  et  $q$  les affixes respectives des points N, P et Q.

1. Montrer que  $n = im + 1 + i$ . On admettra que  $p = -m + 1 + i$  et  $q = -im$ .
2. Montrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.
3.
  - a. Montrer l'égalité :  $\frac{m-n}{p-n} = i + \frac{1}{m}$ .
  - b. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.  
Déterminer l'ensemble  $(\Gamma)$  des points M tels que le quadrilatère MNPQ soit un rectangle.

EXERCICE 2

4 points

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.

On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.

Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux?

### Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  avec  $\lambda > 0$ .

Ainsi, pour tout réel  $t$  positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à  $t$  années, notée  $p(X \leq t)$ , est donnée par :  $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

1. Déterminer  $\lambda$  sachant que  $p(X > 5) = 0,4$ .
2. Dans cette question, on prendra  $\lambda = 0,18$ .  
Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à  $10^{-3}$  près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans?
3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que  $p(X > 5) = 0,4$ .
  - a. On considère un lot de 10 ordinateurs.  
Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.
  - b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999?

### EXERCICE 3

5 points

#### Partie A : Restitution organisée de connaissances

On considère trois points A, B et C de l'espace et trois réels  $a, b$  et  $c$  de somme non nulle.

Démontrer que, pour tout réel  $k$  strictement positif, l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\|a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}\| = k$  est une sphère dont le centre est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs  $a, b$  et  $c$ .

#### Partie B

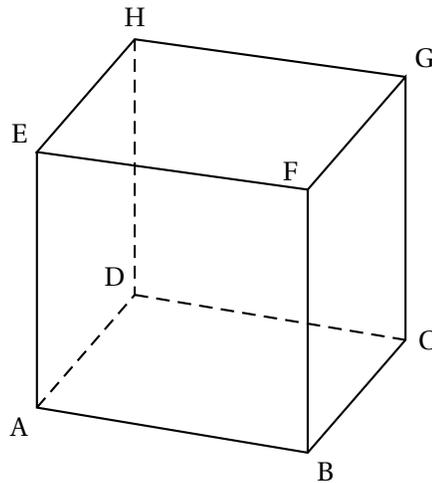
On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.

Il n'est pas demandé de rendre le graphique avec la copie.

L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. Démontrer que le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $(1; 0; 1)$  est un vecteur normal au plan (BCE).
2. Déterminer une équation du plan (BCE).
3. On note  $(\Delta)$  la droite perpendiculaire en E au plan (BCE).  
Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$ .
4. Démontrer que la droite  $(\Delta)$  est sécante au plan (ABC) en un point R, symétrique de B par rapport à A.
5.
  - a. Démontrer que le point D est le barycentre des points R, B et C affectés des coefficients respectifs 1,  $-1$  et 2.
  - b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble  $(S)$  des points  $M$  de l'espace tels que  $\|\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{2}$ .

- c. Démontrer que les points B, E et G appartiennent à l'ensemble (S).  
 d. Démontrer que l'intersection du plan (BCE) et de l'ensemble (S) est un cercle dont on précisera le rayon.

**EXERCICE 3****Enseignement de spécialité****5 points****Partie A : Restitution organisée de connaissances**

Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

**Partie B**

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« Si  $p$  est un nombre premier et  $q$  un entier naturel premier avec  $p$ , alors  $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  ».

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite.
2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n$  est pair.
3. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  pair non nul,  $u_n$  est divisible par 4.

On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite  $(u_n)$ .

4. Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?
5. Soit  $p$  un nombre premier strictement supérieur à 3.
  - a. Montrer que :  $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$  et  $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$ .
  - b. En déduire que  $6u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$ .
  - c. Le nombre  $p$  appartient-il à l'ensemble (E) ?

## EXERCICE 4

6 points

**Partie A**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

1. Étudier les variations de la fonction  $g$ .
2. Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
3. En déduire que pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ ,  $e^x - x > 0$ .

**Partie B**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 1]$  par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}.$$

La courbe ( $\mathcal{C}$ ) représentative de la fonction  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

On admet que  $f$  est strictement croissante sur  $[0; 1]$ .

1. Montrer que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $f(x) \in [0; 1]$ .
2. Soit (D) la droite d'équation  $y = x$ .
  - a. Montrer que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$ .
  - b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe ( $\mathcal{C}$ ) sur  $[0; 1]$ .
3.
  - a. Déterminer une primitive de  $f$  sur  $[0; 1]$ .
  - b. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe ( $\mathcal{C}$ ), la droite (D) et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .

**Partie C**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= f(u_n), \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ .
3. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

## ANNEXE

*Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve*

## EXERCICE 4

