

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane 9 septembre 2015

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2 e^{-2nx}.$$

On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

Partie A : Étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur \mathbb{R} par $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$.
On admet que f_1 est dérivable sur \mathbb{R} et on note f_1' sa dérivée.
 - a. Justifier que pour tout réel x , $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.
 - b. Étudier les variations de la fonction f_1 sur \mathbb{R} .
 - c. Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.
 - d. Vérifier que pour tout réel x , $f_1(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $F_1(x) = -e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$.
En déduire la valeur exacte de I_1 .

Partie B : Étude de la suite (I_n)

1. Soit n un entier naturel non nul.
 - a. Interpréter graphiquement la quantité I_n .
 - b. Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n) . Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.
2. a. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$,

$$f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x).$$

- b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$,

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

- c. Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n) .
3. Soit n un entier naturel non nul.
- a. Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$,

$$0 \leq f_n(x) \leq e^{-2nx}.$$

- b. En déduire un encadrement de la suite (I_n) , puis sa limite.*

EXERCICE 2**5 points****Commun à tous les candidats**

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x , où x est un réel de l'intervalle $[0; 1]$.

Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événements suivants :

R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;

J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x .
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X . On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Partie C

Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 %.
2. Que penser de l'affirmation du fournisseur?*

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

Les trois questions sont indépendantes.

Toute réponse doit être justifiée.

1. On définit une suite (u_n) de réels strictement positifs par

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1.$$

La suite (u_n) est-elle géométrique?

2. Soit (v_n) une suite à termes strictement positifs.

On définit la suite (w_n) par, pour tout entier naturel n , $w_n = 1 - \ln(v_n)$.

La proposition (\mathcal{P}) suivante est-elle vraie ou fausse?

(\mathcal{P}) : si la suite (v_n) est majorée alors la suite (w_n) est majorée.

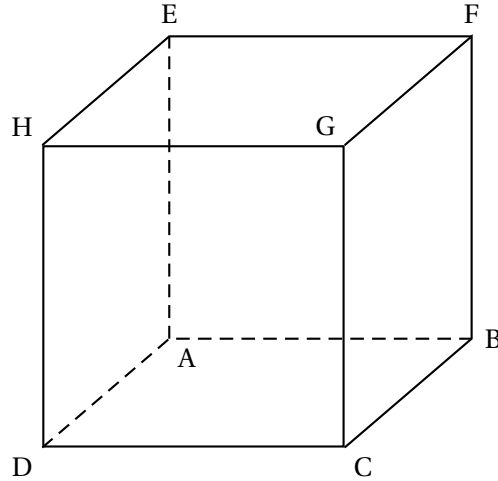
3. La suite (z_n) de nombres complexes est définie par

$$z_0 = 2 + 3i \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ par } z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}}{4} \right) z_n.$$

Pour quelles valeurs de n , $|z_n|$ est-il inférieur ou égal à 10^{-20} ?*

EXERCICE 4**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Soit ABCDEFGH le cube ci-dessous.



On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a. Montrer que la droite (DB) admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = 0 \end{cases} \text{ où } s \text{ décrit l'ensemble } \mathbb{R} \text{ des nombres réels.}$$

- b. Montrer que les points de la droite (AG) sont les points de coordonnées $(t; t; t)$ où t est un réel.
2. Soit M un point quelconque de la droite (DB) et N un point quelconque de la droite (AG).
Démontrer que la droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si M et N ont pour coordonnées respectives $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$ et $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.
3. Soit s et t deux réels quelconques. On note $M(s; 1 - s; 0)$ un point de la droite (DB) et $N(t; t; t)$ un point de la droite (AG).

a. Montrer que $MN^2 = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.

- b. En déduire la position des points M et N pour laquelle la distance MN est minimale.

Que peut-on dire de la droite (MN) dans ce cas?*

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation

$$51x - 26y = 1$$

où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1. Justifier, en énonçant un théorème du cours, que cette équation admet au moins un couple solution.
2. a. Donner un couple solution $(x_0 ; y_0)$ de cette équation.
b. Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

| | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x compris entre 0 et 25, on définit une fonction de codage f par $f(x) = y$, où y est le reste de la division euclidienne de $51x + 2$ par 26.

La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre correspondant à l'entier y .

1. Coder la lettre N.
2. En utilisant la partie A, déterminer l'entier a tel que $0 \leq a \leq 25$ et $51a \equiv 1 [26]$.
3. Démontrer que si la lettre correspondant à un entier x est codée par une lettre correspondant à un entier y , alors x est le reste de la division euclidienne de $ay + 2$ par 26.
4. Déterminer alors la lettre qui est codée par la lettre N.
5. On applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre x correspondant à une certaine lettre. Quelle lettre obtient-on?*