Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole 23 juin 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la répons exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A(1 ; 2 ; −1), B(1 ; 1 ; 0), C(9 ; −1 ; −2), S(1; 1; 1).

On admet qu'une équation du plan (ABC) est $x+2y+2z-3=0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

a. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t\\ y &=& 2-4t\\ z &=& -1+3t\end{array}\right.$ (t réel) **b.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& -1-t\\ z &=& 3+t\end{array}\right.$ (t réel) **c.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& 1-2t\\ z &=& 2t\end{array}\right.$ (t réel)

2. Les coordonnées du point S′ symétrique du point S par rapport au plan (ABC) sont :

a. $\left(\dfrac{10}{9} ; \dfrac{11}{9} ; \dfrac{10}{9}\right)$ **b.** $\left(\dfrac{5}{9} ; \dfrac{1}{9} ; \dfrac{1}{9}\right)$ **c.** $\left(\dfrac{7}{9} ; \dfrac{5}{9} ; \dfrac{5}{9}\right)$

3. Le triangle ABC est :

a. isocèle **b.** en A **c.** rectangle en B

4. L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\left\|\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 9$ est :

a. un plan passant par S **b.** une sphère passant par S **c.** une sphère de centre S

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On désigne par A, B et J les points d'affixes respectives −i, 1 − i et i.

On désigne par Δ la médiatrice du segment [AB] et par $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

À tout point M d'affixe z distincte de 1 − i, on associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\text{i}(z+\text{i})}{z-1+\text{i}}.$$

Le point M' est appelé image du point M.

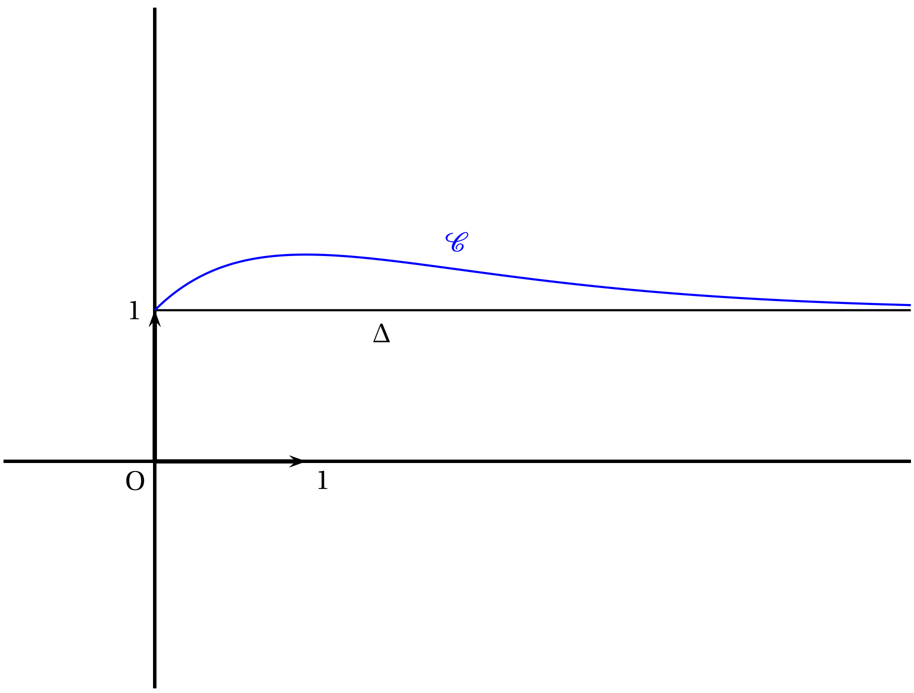
1. Calculer les affixes des points A$'$ et O$'$.
2. Sur la feuille de papier millimétré, faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice (unité graphique 4 cm).
3. Montrer que l'équation $z = \dfrac{\text{i}(z+\text{i})}{z-1+\text{i}}$ admet deux solutions que l'on précisera.
   On note E et F les points qui ont pour affixes respectives ces solutions.
   Justifier que les points E et F appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ et les placer sur la figure.
4. Soit M un point distinct du point B et M' son image.
   a. Exprimer la distance OM' en fonction des distances AM et BM.
   b. Montrer que si le point M décrit la droite Δ, alors le point M' décrit un cercle que l'on précisera.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Montrer que si le point M décrit la droite (AB) privée du point B, alors le point M' appartient à une droite que l'on précisera.

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x\text{e}^{-x}.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ et la droite Δ d'équation $y = 1$ sont tracées ci-dessous.



Partie A

1. Justifier les propriétés suivantes constatées sur la représentation graphique.

a. La droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

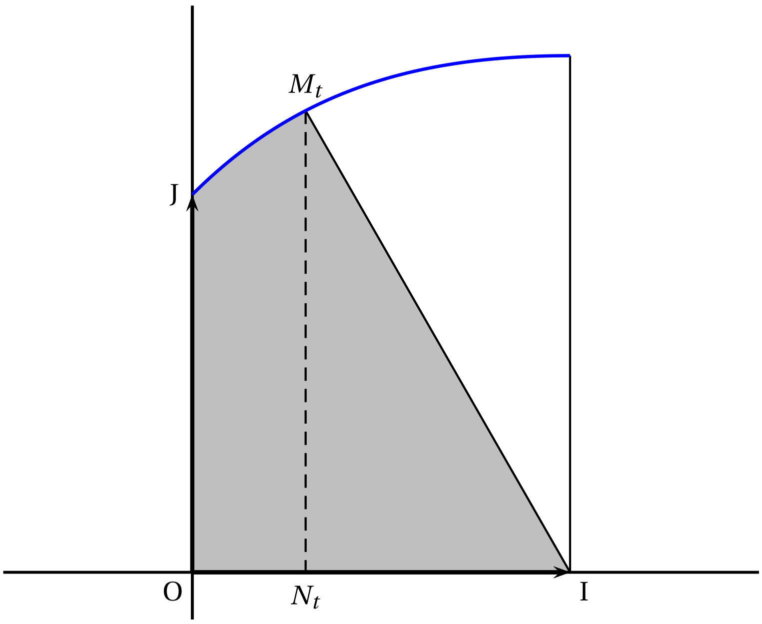
2. Soit t un nombre réel positif. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Interpréter graphiquement cette intégrale.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = t - t\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-t} + 1$.

Partie B

On note I le point de coordonnées $(1\,;\,0)$ et J le point de coordonnées $(0\,;\,1)$.
Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$, M_t désigne le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse t et N_t le point de coordonnées $(t\,;\,0)$.
On appelle $\mathscr{D}_t$, le domaine du plan délimité par la droite $(\mathrm{I}M_t)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathscr{C}$. Ce domaine est représenté par la zone grisée du graphique ci-joint. Soit $\mathscr{A}(t)$ la mesure de son aire exprimée en unité d'aire.



1. Interpréter graphiquement $\mathscr{A}(0)$ et donner sa valeur exacte.

2. Interpréter graphiquement $\mathscr{A}(1)$ et donner sa valeur exacte.

3. Calculer l'aire du triangle $M_tN_t\mathrm{I}$.

4. En déduire que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$\mathscr{A}(t) = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + 1\right)\mathrm{e}^{-t}.$$

5. *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Existe-t-il un unique nombre réel α de l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $\mathscr{A}(\alpha) = \dfrac{1}{2} \times \mathscr{A}(1)$?

Justifier la réponse.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

a. Calculer u_2, u_3 et u_4.

b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

c. Sur l'annexe à rendre avec la copie, sont tracées, dans un repère orthonormal les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$.

À partir de u_0, en utilisant ces deux droites, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes u_2, u_3 et u_4.

Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?

2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit (w_n) la suite de premier terme w_0 et telle que, pour tout nombre entier naturel n, $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 3$.

On suppose que w_0 est strictement supérieur à 6.

Les suites (u_n) et (w_n) sont-elles adjacentes ? Justifier.

ANNEXE Exercice 4 (à rendre avec la copie)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité