

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie septembre 2009 ∞

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

On considère le cube OABCDEFG d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.

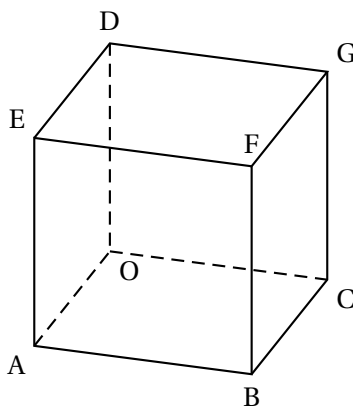
Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.

Soient les points P et Q tels que $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OQ} = 4\overrightarrow{OC}$.

On appelle R le barycentre des points pondérés (B, -1) et (F, 2).

L'espace est muni du repère orthonormal $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

- Démontrer que le point R a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).
 - Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.
 - Quelle est la nature du triangle PQR?
- Démontrer qu'une équation du plan (PQR) est $4x + 2y + z - 8 = 0$.
 - Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (PQR).
- On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (PQR).
 - Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (DH).
 - Déterminer les coordonnées du point H.
 - Démontrer que le point H appartient à la droite (PR).



EXERCICE 2

4 points

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, deux propositions sont énoncées.

Il s'agit de dire, sans le justifier, si chacune d'elles est vraie ou fausse. **Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la proposition et la mention VRAIE ou FAUSSE.**

Pour chaque question, il est compté 1 point si les deux réponses sont exactes, 0,5 point pour une réponse exacte et une absence de réponse et 0 point sinon.

<p align="center">Question A</p> <p>Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire deux boules au hasard simultanément. On considère les évènements : A : « les deux boules tirées sont de la même couleur » ; B : « une seule des deux boules tirées est rouge ».</p>	<p align="center">Proposition 1</p> <p>La probabilité de A est égale à $\frac{3}{7}$.</p>	<p align="center">Proposition 2</p> <p>La probabilité de B est égale à $\frac{1}{7}$.</p>
<p align="center">Question B</p> <p>Soient A, B et C trois évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité P. On sait que :</p> <ul style="list-style-type: none"> • A et B sont indépendants ; • $P(A) = \frac{2}{5}$; $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$; • $P(C) = \frac{1}{2}$; $P(A \cap C) = \frac{1}{10}$. 	<p align="center">Proposition 3</p> <p>$P(B) = \frac{7}{12}$</p>	<p align="center">Proposition 4</p> <p>$P(\overline{A \cup C}) = \frac{2}{5}$. $\overline{A \cup C}$ désigne l'évènement contraire de $A \cup C$.</p>
<p align="center">Question C</p> <p>Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p où n est égal à 4 et p appartient à $]0; 1[$.</p>	<p align="center">Proposition 5</p> <p>Si $P(X = 1) = 8P(X = 0)$ alors $p = \frac{2}{3}$.</p>	<p align="center">Proposition 6</p> <p>Si $p = \frac{1}{5}$ alors $P(X = 1) = P(X = 0)$.</p>
<p align="center">Question D</p> <p>La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,07$ sur $[0; +\infty[$. On rappelle que pour tout $t > 0$, la probabilité de l'évènement $(X \leq t)$ est donnée par : $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ (avec $\lambda = 0,07$).</p>	<p align="center">Proposition 7</p> <p>La probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.</p>	<p align="center">Proposition 8</p> <p>Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.</p>

EXERCICE 3**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire**

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O , d'affixe z , associe le point $M' = F(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = z + i - \frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = i$ et $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' par F d'affixes respectives a' et b' .
 - a. Calculer a' et b' .
 - b. Placer les points A, A', B et B' .
 - c. Démontrer que $\frac{-b}{b' - b} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$.
 - d. En déduire la nature du triangle OBB' .
2. On recherche l'ensemble (E) des points du plan P privé du point O qui ont pour image par F , le point O .

- a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z ,

$$z^2 + iz - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right).$$

- b. En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).
c. Démontrer que les points de (E) appartiennent à (Γ).

3. Soit θ un réel.

- a. Démontrer que si $z = e^{i\theta}$ alors $z' = (2 \sin \theta + 1)i$.
b. En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment $[A'C]$ où C a pour affixe $-i$.

EXERCICE 4

7 points

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = -nx - x \ln x.$$

On note (\mathcal{C}_n) la courbe représentative de la fonction f_n , dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les courbes (\mathcal{C}_0) , (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) représentatives des fonctions f_0 , f_1 et f_2 sont données en annexe.

On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur $]0; +\infty[$ par $f_0(x) = -x \ln x$

- Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
- Étudier les variations de la fonction f_0 sur $]0; +\infty[$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n , n entier naturel

Soit n un entier naturel.

- Démontrer que pour $x \in]0; +\infty[$, $f'_n(x) = -n - 1 - \ln x$ où f'_n désigne la fonction dérivée de f_n .
- Démontrer que la courbe (\mathcal{C}_n) admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
 - Prouver que le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.
 - Placer sur la figure en annexe les points A_0 , A_1 , A_2 .
- Démontrer que la courbe (\mathcal{C}_n) coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n , dont l'abscisse est e^{-n} .
 - Démontrer que la tangente à (\mathcal{C}_n) au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n .
 - Placer sur la figure en annexe les points B_0 , B_1 , B_2 .

Partie C : Calculs d'aires

Pour tout entier naturel n , on considère le domaine du plan D_n délimité par l'axe des abscisses, la courbe (\mathcal{C}_n) et les droites d'équation $x = e^{-n-1}$ et $x = e^{-n}$.

On note I_n l'aire en unités d'aires du domaine D_n .

1. Hachurer, sur la figure donnée en annexe, les domaines D_0, D_1, D_2 .
2. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\frac{1}{e}}^1 x \ln x \, dx$.
b. En déduire que $I_0 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$.
c. On admet que le domaine D_{n+1} est l'image du domaine D_n par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{e}$.
Exprimer I_1 et I_2 en fonction de I_0 .

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise à la fin de l'épreuve

Exercice 4

