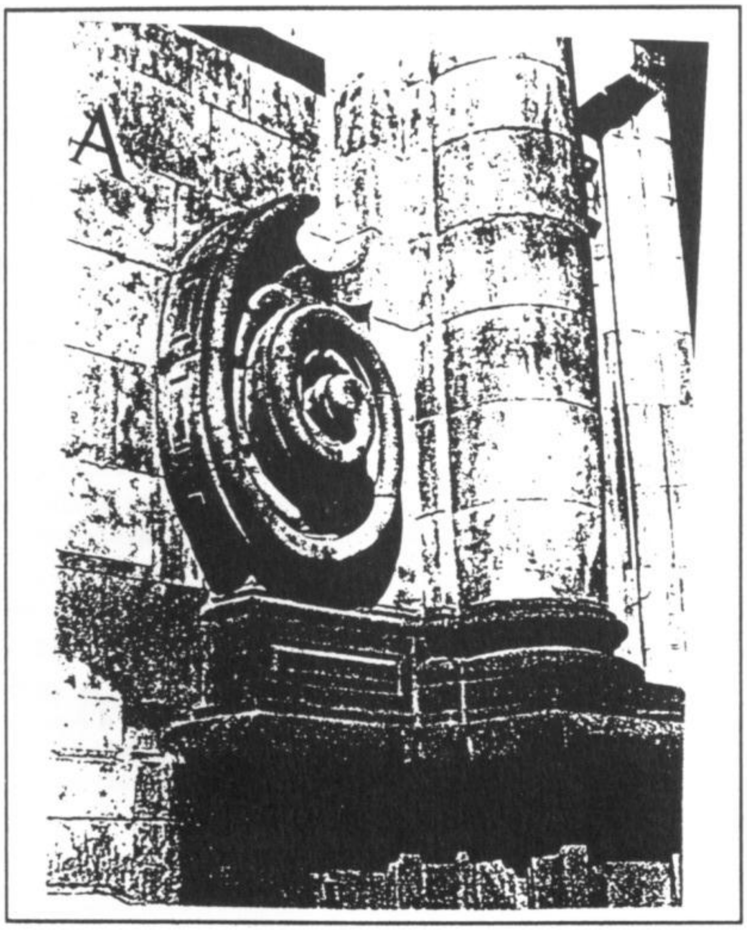
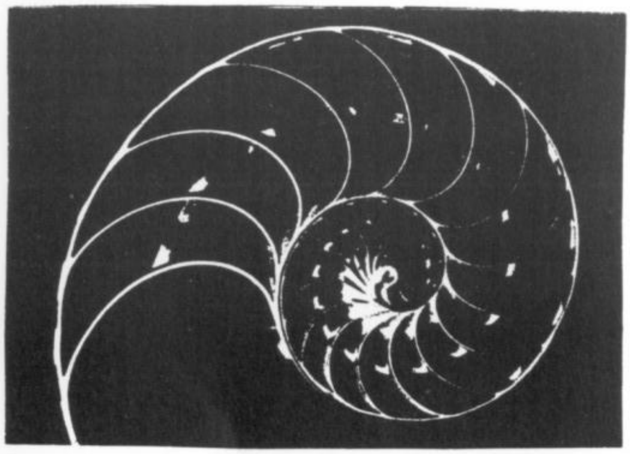
GALION THÈMES

Des Spirales

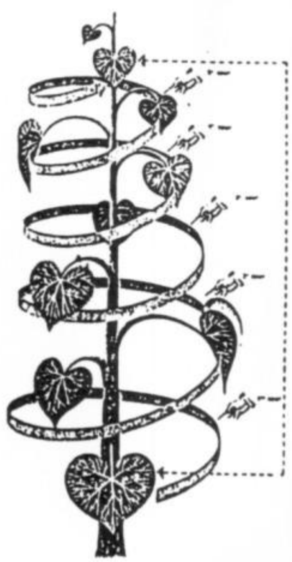


Université de Salamanque

15, quai André Lassagne - 69001 LYON
1992



« Véritable Portrait de Monsieur Ubu », bois gravé d'Alfred Jarry (1896)



On rencontre des spirales un peu partout :

dans la nature, en observant les coquillages, les nautiles en particulier, les feuilles autour d'une tige, la disposition des piquants de cactus, vos empreintes digitales.

En astronomie, certaines photographies de galaxie donnent de très belles spirales, invisibles à l'œil nu.

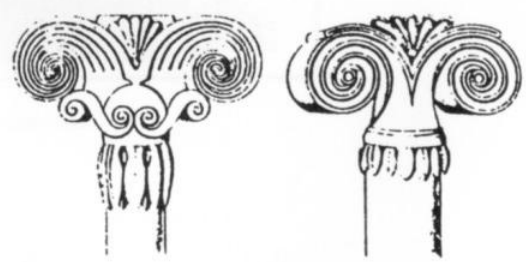
La spirale va aussi se loger dans le tire-bouchon, la vis d'Archimède, les bandes d'enregistrement de vos cassettes audio ou vidéo, les sillons d'un disque, la représentation de l'A.D.N. en chimie …

Vous retrouverez encore la spirale comme motif décoratif en peinture, en architecture, comme sur la façade de l'Université de Salamanque.

En littérature vous retrouvez la spirale sur la bedaine du père Ubu, un poème d'Apollinaire, … et même sur les têtes de Tintin et Milou …

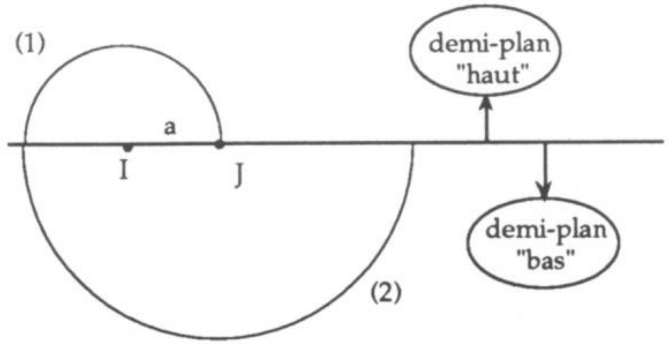
Pour étudier les différents thèmes de cette brochure, vous aurez :

- d'une part à effectuer des dessins avec la plus grande précision,
- d'autre part à calculer au moyen d'une calculatrice scientifique.



Chapiteaux éoliques à volutes

1 La plus simple de toutes : la spirale à deux centres



I et J sont deux points de la droite d : $\boxed{IJ = a}$ (c'est une longueur donnée).

On va tracer des demi-cercles de centre I : dans le demi-plan "haut" et des demi-cercles de centre J, dans le demi plan "bas".

Le demi-cercle de centre I, de rayon R est noté : (I, R).

Du dessin d'abord

Prenez au départ $a = 1$ cm. Tracez le demi-cercle (I, a), puis (J, 2a), puis (I, 3a), (J, 4a), ... etc.

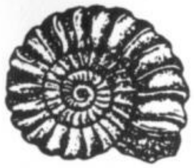
Tracez ainsi dix demi-cercles successifs ... c'est une première spirale dite "à deux centres".

Deux demi-cercles successifs se "raccordent bien" : ils ont la même tangente là où ils se rejoignent. Pourquoi ?

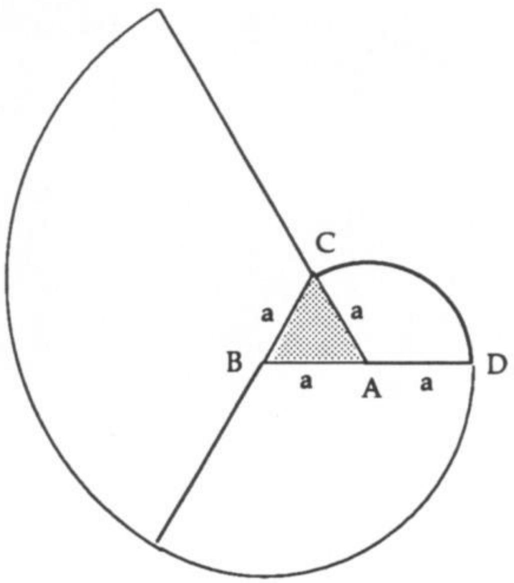
Du calcul ensuite

- Calculez la longueur ℓ_1 du premier demi-cercle (avec $a = 1$ cm), puis ℓ_2, celle du second, etc.
  Comment passe-t-on de ℓ_1 à ℓ_2, de ℓ_2 à ℓ_3, ... ?
  Calculez la valeur exacte de $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ldots + \ell_{10}$ puis une valeur approchée.
- Calculez l'aire A_1 du premier demi-disque, puis A_2, celle du second, puis A_3, etc.
  Comment passe-t-on de A_1 à A_2 ? de A_2 à A_3 ?

Technique : ce type de spirale est utilisée dans un cyclotron (accélérateur de particules). Voyez ce mot. Documentez-vous !



2 Et la spirale à trois centres !



ABC est un triangle équilatéral de côté a. On considère l'arc de cercle C_1 de centre A, de rayon a et d'angle 120°, puis l'arc de cercle C_2 de centre B de rayon 2a et d'angle 120°; l'arc de cercle C_3, de centre C, de rayon 3a et d'angle 120°, l'arc de cercle C_4, de centre A, de rayon 4a et d'angle 120° ... On passe d'un arc au suivant en augmentant le rayon de a, en gardant un angle de 120° et en permutant circulairement les points A, B, C.

Du dessin d'abord

Faites un dessin jusqu'à C_{10} : on prendra $a = 1$ cm pour côté de ABC.

Démontrez que, au point où deux arcs de cercle se rejoignent, ils ont la même tangente.

Du calcul ensuite

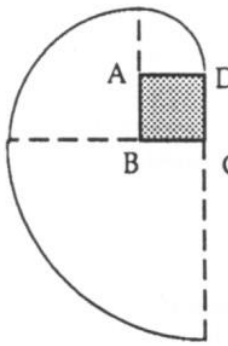
- On appelle L_1 la longueur de l'arc C_1, L_2 celle de C_2, ...

  Calculez $L_1, L_2, L_3, \dots, L_{10}$. Comment passe-t-on de L_1 à L_2 ? de L_2 à L_3 ? Calculez $L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_{10}$ (valeur exacte).

- On appelle S_1 l'aire du secteur circulaire limité par C_1 et les deux rayons AC et AD, S_2 l'aire du secteur circulaire limité par C_2, etc.

  Calculez $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{10}$.

3 Spirale à quatre centres !



ABCD est un carré de côté a, C_1 est le quart de cercle de centre A, de rayon a. C_2 est le quart de cercle de centre B et de rayon 2a; C_3 est le quart de cercle de centre C et de rayon 3a; C_4 est le quart de cercle de centre D et de rayon 4a; C_5 est le quart de cercle de centre A et de rayon 5a ...

On passe d'un quart de cercle au suivant en augmentant le rayon de a et en "permutant circulairement" les points A, B, C, D, ...

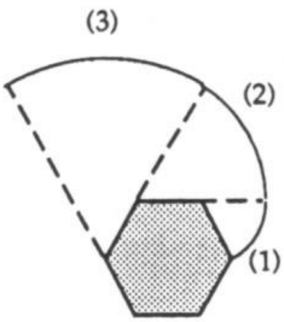
Du dessin d'abord

- Faites un dessin jusqu'à C_{10} avec $a = 1$ cm.
- Démontrez que, au point où deux quarts de cercle se joignent, ils ont la même tangente.

Du calcul ensuite

- Comme à l'activité 2, calculez les longueurs des quarts de cercle successifs, et les aires des quarts de disques.

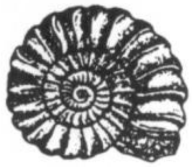
4 La spirale à six centres !



Vous avez compris que, avec un polygone régulier à 3 ou 4 sommets vous pouvez tracer une spirale à 3 ou 4 centres.

Exercez-vous à tracer une spirale à six centres à partir d'un hexagone régulier.

Étudiez le raccordement des arcs, calculez des longueurs d'arcs et des aires de secteurs ...



5 La spirale d'ARCHIMÈDE

Archimède est né à Syracuse aux environs de 287 av J.-C. Il était semble-t-il parent du roi Hieron.

Il étudia tous les problèmes de centre de gravité au moyen de considérations sur l'équilibre des corps. C'est en étudiant des problèmes de mécanique qu'il s'intéresse à la géométrie. On raconte qu'il était tellement passionné de recherche qu'il en oubliait de boire et de manger.

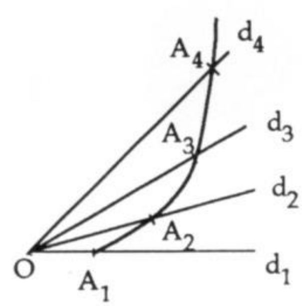
Il est surtout connu pour le fameux *"Principe d'Archimède"* qui énonce que : *"Tout corps plongé dans un liquide reçoit de ce liquide une poussée, de bas en haut, égale au poids du liquide déplacé".*

Dans le traité ***"De la mesure du cercle"***, il donne, pour le nombre π l'encadrement $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$; l'approximation $\pi \approx \frac{22}{7}$ est due à Archimède.

Dans ***"le Traité des spirales"*** on trouve le texte suivant : *"Lorsqu'une droite, dont une extrémité est fixe, tourne uniformément dans un plan et que, sur la droite en rotation, un point se meut uniformément, le point décrira une spirale dans le plan".*

En 212 av. J.-C., Archimède a été tué par un soldat romain lui demandant son identité. Il ne répond pas et se contente de dire *"Ne dérangez pas mes cercles".*

Du dessin d'abord



- Tracez des droites passant toutes par le point O, faisant entre elles un angle de 15° : vous obtenez 24 demi-droites de même origine O. Elles sont notées d_1 à d_{24}.
- Sur d_1, marquez le point A_1 tel que $OA_1 = 0{,}2$ cm.
  Sur d_2 , marquez le point A_2 tel que $OA_2 = 0{,}4$ cm.

  Si l'angle augmente de 15°, la longueur OA augmente de 0,2 cm, en tournant dans le sens positif (sens inverse des aiguilles d'une montre).
- Construisez les points de A_1 à A_{25}.

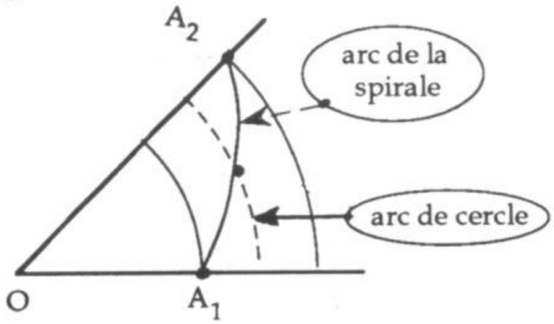
  Les points A_1 , A_2 , ..., A_{25} sont situés sur une spirale d'Archimède. Joignez ces points par une ligne courbe.

Puis des calculs

Valeur approchée de la longueur de la spirale.

On assimile l'arc $\overparen{A_1A_2}$ de la spirale, à un arc de cercle, de centre O, dont le rayon r est la moyenne des deux rayons OA_1 et OA_2 :

$$r = \frac{1}{2}\ (OA_1 + OA_2)\ .$$



De même pour les arcs suivants.
En utilisant cette méthode, trouvez une valeur approchée de la longueur de l'arc $\overparen{A_1A_2}$, puis de $\overparen{A_2A_3}$, puis de $\overparen{A_3A_4}$, etc.

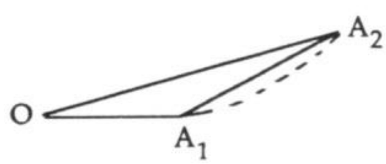
Arc de spirale	$\overparen{A_1A_2}$	$\overparen{A_2A_3}$	$\overparen{A_3A_4}$	$\overparen{A_4A_5}$	$\overparen{A_5A_6}$	$\overparen{A_6A_7}$
Longueur en mm						

Évaluez la longueur totale de la spirale de A_1 à A_6 , puis de A_1 à A_{25} .

Comment en déduire la longueur de A_1 à A_{49} ?

Valeur approchée de l'aire délimitée par l'arc $\overparen{A_1A_2}$ et les demi-droites d_1 et d_2 .

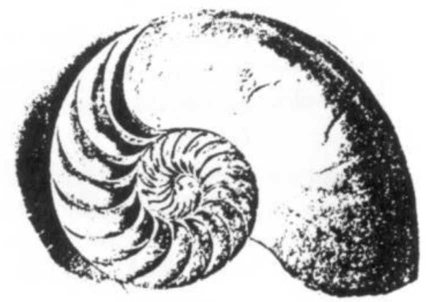
Pour calculer une valeur approchée de l'aire de la surface délimitée par l'arc $\overparen{A_1A_2}$ et les demi-droites d_1 et d_2 , on assimilera l'arc $\overparen{A_1A_2}$ à un segment (voir dessin).



On remplace ainsi l'aire du "secteur de spirale" par l'aire d'un triangle. Formule à utiliser : $S = \frac{1}{2}\ b\ c \sin 15°$.

Trouvez l'aire de chacun des 24 triangles puis la somme de ces aires. Comparez cette somme à l'aire du cercle de rayon OA_{25}. Continuez le tracé jusqu'à A_{49} . Trouvez l'aire comprise entre les deux arcs de spirale A_1A_{25} et $A_{25}A_{49}$. Comparez cette aire à celle du cercle de rayon OA_{25} .

6 Spirale de Jacques BERNOULLI



Découverte par Descartes (1596-1650), cette spirale dite "logarithmique" ou "mirabilis" a été plus spécialement étudiée par Jacques Bernoulli (1654-1705) qui disait d'elle : "Je puis à peine me rassasier de sa contemplation". Il voulut qu'une telle spirale fut gravée sur sa tombe avec la devise "EADEM MUTATA RESURGO". Elle figure sur le costume du Père Ubu et sur la cravate du collège de Pataphysique.

Du dessin d'abord

Comme à l'activité 5, tracez des droites passant par le point O et faisant entre elles un angle de 15°. Vous obtenez 24 demi-droites de même origine, notées d_1 à d_{24}.

Sur d_1, marquez A_1 avec

$OA_1 = 1$ cm.

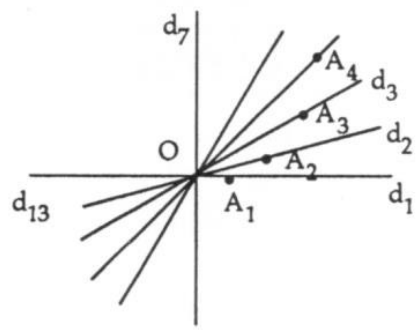
Sur d_2, marquez A_2 tel que

$OA_2 = OA_1 \times 1{,}05$

Sur d_3, marquez A_3 :

$OA_3 = OA_2 \times 1{,}05$.

Si l'angle augmente de 15°, la longueur OA est multipliée par 1,5, en tournant dans le sens positif.



Construisez les 25 points de A_1 à A_{25} : ces points sont situés sur une spirale de Bernoulli.

Joignez ces points par une ligne courbe. Continuez le tracé jusqu'à A_{37}.

Du calcul ensuite

Pour calculer une valeur approchée de la longueur de A_1 à A_{25}, on assimilera chacun des arcs à un arc de cercle : celui de centre O et de rayon la moyenne des deux rayons.

Trouvez une approximation de la longueur de la spirale $A_1A_2 \ldots A_{25}$.

Comment passe-t-on du point A_1 au point A_{25} ? de A_2 au point A_{26} ? de A_3 au point A_{27} ? ... de A_n au point A_{n+24} ?

Connaissant la longueur de l'arc $\overset{\frown}{A_1A_{25}}$, comment en déduire celle de l'arc $\overset{\frown}{A_{25}A_{49}}$?

Montrez que les droites (A_1A_2) et $(A_{25}A_{26})$ sont parallèles. Trouvez d'autres droites parallèles.

Pour les "savants" : Que peut-on conjecturer pour les tangentes à la spirale aux points A_1 et A_{25} ? aux points A_n et A_{n+24} ?

7 La toile d'araignée de BERNOULLI

Du dessin d'abord

Tracez un cercle de centre A et de rayon 10 cm. Partagez-le en douze arcs égaux; tracez les 12 demi-droites Ax_0 , Ax_1 , Ax_2 , ..., Ax_{11}.

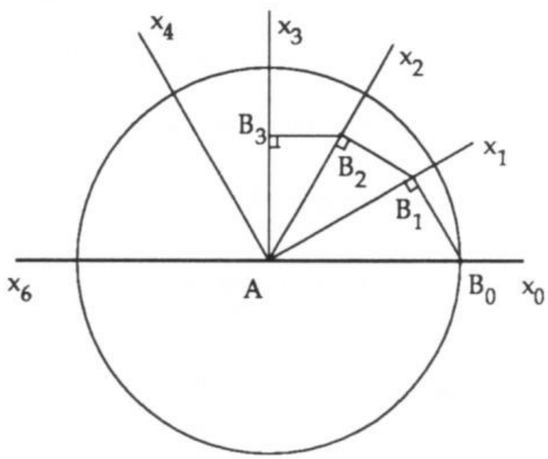
Ax_0 coupe le cercle en B_0 .

B_0 se projette orthogonalement en B_1 sur Ax_1.

B_1 se projette orthogonalement en B_2 sur Ax_2.

B_2 se projette orthogonalement en B_3 sur Ax_3.

etc.



⇨ Construisez les points successifs B_1 , B_2 , ..., B_{12} .

⇨ Tracez les segments $[B_0B_1]$, $[B_1B_2]$, ..., $[B_{11}B_{12}]$.

⇨ Vous pouvez dessiner une spirale passant par B_0 , B_1 , B_2 , ..., B_{12}.

Puis des calculs

- Comment s'exprime AB_1 en fonction de AB_0 ? AB_2 en fonction de AB_1 ? AB_{p+1} en fonction de AB_p ?
  Voyez-vous une analogie avec l'activité 6 ?
- Calculez la longueur exacte de la ligne polygonale $B_0B_1 \dots B_{12}$.
- Calculez l'aire de chacun des triangles AB_0B_1 , AB_1B_2 , ... puis la somme des aires de ces douze triangles rectangles jusqu'à B_{12} : donnez-en la valeur exacte.

Recommencez en partageant le cercle en 36 arcs de 10°.

8 La spirale de FERMAT

Pierre de Fermat (1601-1665), mathématicien français, s'est intéressé à la théorie des nombres, aux probabilités, à la géométrie analytique et à bien d'autres problèmes.

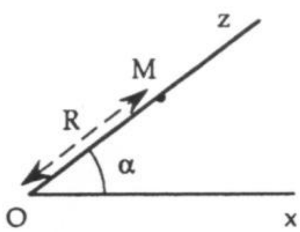
Il a étudié cette spirale particulière en 1636.

Des calculs

Ox est une demi-droite fixe : c'est l'axe polaire de référence.

Une demi-droite variable Oz tourne autour de O.

On appelle α la mesure en degrés de l'angle $\widehat{xOz}$.



Sur Oz, on marque le point M : OM = R avec $R = k\sqrt{\alpha}$ (k étant un nombre donné). Ainsi, à chaque valeur de α correspond une valeur de R, donc un point M. (α, R sont les coordonnées polaires du point M).

A partir de $\alpha = 10°$, calculez R en prenant pour coefficient $k = 0{,}4$.
Remplissez le tableau ci-dessous qui donne les valeurs de R en fonction de α.

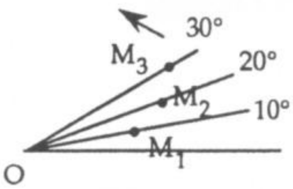
α	10	20	30	40		180
R	1,26	1,79				

α	190	200	210			360
R						

Pour aller plus loin ...
En faisant varier α de 30° en 30°, poursuivez les calculs de R, à partir de 360°, jusqu'à 1440° ...

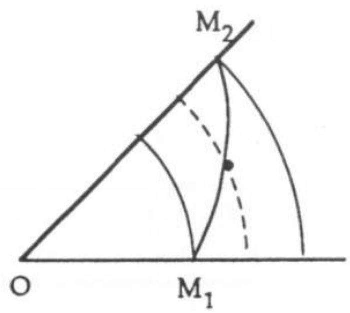
Du dessin

Pour chaque valeur de α, marquez le point M correspondant avec OM = R. Tracez une courbe passant par les points successifs de O à M_{36}. On peut aller jusqu'à $\alpha = 1440°$ ... On obtient alors une spirale de Fermat.



Et d'autres calculs ...

- On veut obtenir une valeur approchée de la longueur de cette spirale. Pour cela, comme précédemment, on assimilera chacun des arcs de cercles : celui de centre O et de rayon, la moyenne des deux rayons OM_1 et OM_2 par exemple.



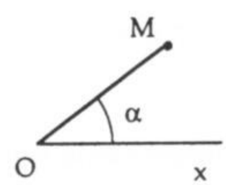
  Trouvez une approximation de la longueur de la courbe de O à M_{36}.

- Comment obtenir une approximation de l'aire délimitée par la courbe depuis O jusqu'à M_{36} ? Expliquez votre démarche. On aura intérêt à utiliser une calculatrice programmable.

9 ... et la spirale de LITUUS

Pour la spirale de Fermat, vous avez utilisé la formule :

$$\underbrace{R}_{\text{longueur OM}} = k \bullet \sqrt{\underbrace{\alpha}_{\text{angle } \widehat{xOM}}}$$

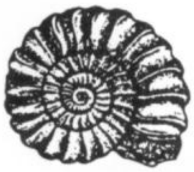


Pour la spirale de Lituus, la formule est $R = \dfrac{k}{\sqrt{\alpha}}$ $(\alpha > 0)$.

Essayez de construire une telle spirale point par point !

Mais il vous faudra prendre pour k une valeur assez grande : par exemple k = 40 cm ou k = 20 cm.

Mais que désigne LITUUS ?



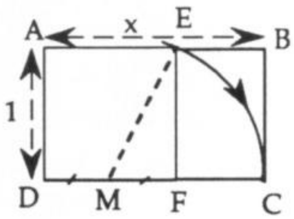
10 La spirale du RECTANGLE D'OR

Qu'est-ce qu'un rectangle d'or ?

AEFD est un carré de côté 1.

M est le milieu de [DF] ; sur la demi-droite [DF), placez le point C tel que MC = ME.

Construisez le rectangle ABCD : c'est un rectangle d'or.



Démontrez que la longueur x du rectangle ABCD est $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

> Un rectangle tel que le rapport de ses côtés est ce nombre x est appelé rectangle d'or.

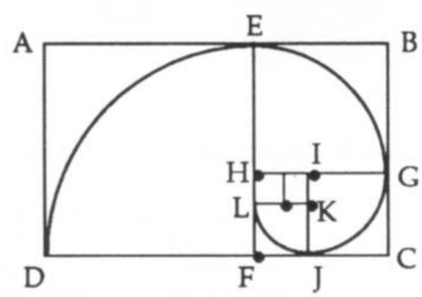
Du dessin

Pour dessiner un rectangle d'or ABCD tel que AD = 10 cm, quelle longueur doit-on prendre pour AB ?

Dessinez un tel rectangle d'or, puis dessinez les carrés AEFD, EBGH, GCJI, FJKL.

C_1 est le quart de cercle de centre F, de rayon DF,
C_2 est le quart de cercle de centre H, de rayon HE,
C_3 est le quart de cercle de centre I, de rayon IG,
C_4 est le quart de cercle de centre K, de rayon KJ, ...

Tracez les quarts de cercles C_1, C_2, C_3, C_4,...



Vous obtenez de la sorte une spirale appelée **Spirale du Rectangle d'Or.**

> **Pour en savoir plus sur le nombre d'or, consulter dans GALION THÈMES, la brochure "Le nombre d'Or".**

Des calculs ...

✔ *D'autres rectangles d'Or :*

ABCD est un rectangle d'Or, ADFE est un carré. Démontrez que EBCF est un rectangle d'or, c'est-à-dire

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BE} = x \text{ (nombre d'or)}$$

Démontrez de même que GHFC, IJFH sont des rectangles d'or.

Comment continuer ... ?

Démontrez qu'au point où deux arcs de cercles se rejoignent, ils ont la même tangente.

✔ *Calculs de longueurs*

Calculez les longueurs L_1, L_2, L_3, ..., L_8 des huit premiers quarts de cercles. Comment obtient-on L_2 à partir de L_1 ? L_3 à partir de L_2 ? etc.

Calculez ensuite la valeur exacte de $L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_8$.

✔ *Calculs d'aires*

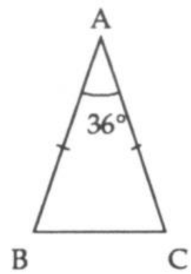
Calculez S_1, S_2, S_3, ..., S_8 les aires des huit premiers quarts de disques. Comment obtient-on S_2 à partir de S_1 ? S_3 à partir de S_2 ? etc.

Calculez ensuite la valeur exacte de $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_8$.

11 La spirale du TRIANGLE D'OR

Qu'est-ce qu'un triangle d'or ?

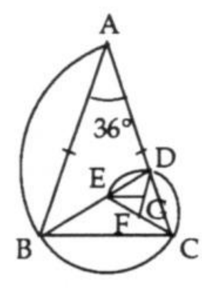
Dessinez un triangle ABC isocèle en A et tel que l'angle au sommet $\widehat{A}$ mesure 36°. Un tel triangle est appelé triangle d'or.



On démontrera plus tard que
si BC = 1,
alors $AB = AC = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = x$ (le nombre d'Or).

Du dessin

Dessinez un triangle isocèle ABC avec
$\widehat{A} = 36°$
AB = AC = 16,2 cm
Vérifiez que BC = 10 cm environ.
Vous avez un triangle d'Or.



Tracez la bissectrice de $\widehat{B}$ qui coupe [AC] en D, puis la bissectrice de $\widehat{C}$ qui coupe [BD] en E, puis la bissectrice de $\widehat{EDC}$ qui coupe [EC] en F, puis la bissectrice de $\widehat{DEF}$ qui coupe [DF] en G.

Tracez : C_1 qui est l'arc $\overset{\frown}{AB}$, de centre D, de rayon DA,
C_2 qui est l'arc $\overset{\frown}{BC}$, de centre E, de rayon EB,
C_3 qui est l'arc $\overset{\frown}{CD}$, de centre F, de rayon FC,
C_4 qui est l'arc $\overset{\frown}{DE}$, de centre G, de rayon GD, …

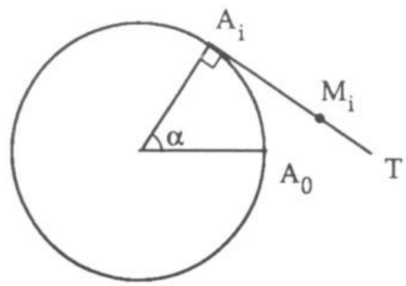
Construisez ces arcs jusqu'à C_8.

Et du calcul …

- Démontrez que les triangles BDC, EDC, EDF, FEG sont des triangles d'or.
- Calculez les côtés des triangles DEC, DEF, CEF, …
  (se rappeler que $\dfrac{\text{côté}}{\text{base}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$).
- Calculez les longueurs $L_1, L_2, \ldots, L_8$ des arcs $C_1, C_2, \ldots, C_8$ (valeurs exactes). On remarquera que $108° = \dfrac{3\pi}{5}$.

12 La spirale de la chèvre

A_0 est un point fixe d'un cercle, A_i un point variable.



Connaissant l'angle au centre α, on peut calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{A_0A_i}$.

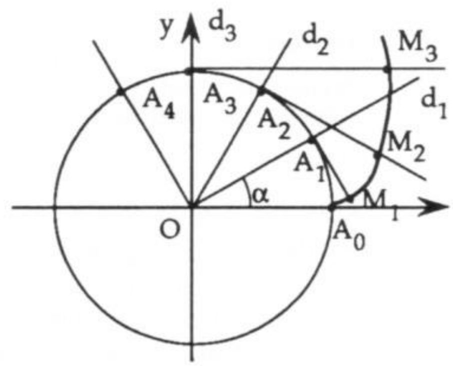
Sur la tangente en A_i, on peut porter un point M_i tel que :

$$A_iM_i = \text{longueur de } \overset{\frown}{A_0A_i} = \ell(\overset{\frown}{A_0A_i}).$$

✍ Du dessin

Tracez un cercle de rayon 3 cm, de centre O et tracez des demi-droites d'origine O, faisant entre elles un angle α de 30°. La première coupe le cercle en A_0. Soit A_1 le point de concours du cercle avec d_1 ...

Calculez en centimètres la longueur du cercle, puis les longueurs (valeurs approchées) des arcs $\overset{\frown}{A_0A_1}$, $\overset{\frown}{A_0A_2}$, $\overset{\frown}{A_0A_3}$, ..., $\overset{\frown}{A_0A_{12}}$.

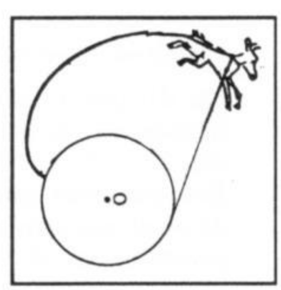


Sur la tangente au cercle en A_1, porter $A_1M_1 = \ell(\overset{\frown}{A_0A_1}) = 1{,}6$ cm,

Sur la tangente au cercle en A_2, porter $A_2M_2 = \ell(\overset{\frown}{A_0A_2})$,

Et ainsi de suite jusqu'à M_{12}.

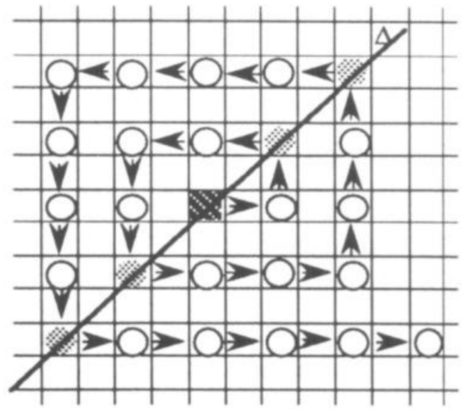
Les points A_0, M_1, M_2, M_3, ... ,M_{12} appartiennent à la spirale de la chèvre. Que se passe-t-il au bout d'un tour, de deux tours ... ? Que peut-on dire de la distance séparant deux points situés sur une même tangente ?



La corde d'une chèvre est enroulée autour d'un poteau cylindrique. Si la chèvre déroule sa corde en la maintenant toujours tendue, l'extrémité de cette corde décrit la spirale de la chèvre.

13 Une spirale pour des nombres premiers

Sur un quadrillage, partant du carré hachuré, on se déplace comme il est indiqué, en sautant chaque fois un carré :
- à droite une fois (D)
- vers le haut une fois (H)
- à gauche deux fois (GG)
- vers le bas deux fois (BB)
- à droite trois fois (DDD)
- vers le haut trois fois (HHH)
- à gauche quatre fois (GGGG)
- vers le bas quatre fois (BBBB)
- etc.



D H GG BB | DDD HHH GGGG BBBB | DDDDD HHHHH GGGGGG ...

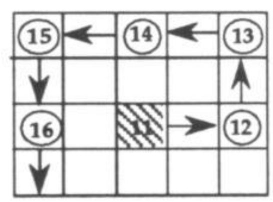
À chaque saut on dessine un rond, ces ronds forment une sorte de spirale.

Dessin

Prenez une feuille quadrillée assez grande, marquez les ronds et coloriez les ronds sur la "diagonale Δ".

Une suite de nombres ...

- Choisissez au départ le nombre 11; ajoutez 1 à chaque saut et marquez le nouveau nombre obtenu dans le rond atteint ... Continuez jusqu'à obtenir 10 nombres (c'est-à-dire 11 – 1) sur la diagonale Δ. Ces dix nombres marqués sur Δ sont des **nombres premiers** : chacun d'eux n'a que deux diviseurs, 1 et lui-même.



- Choisissez au départ le nombre 7 et "tournez" jusqu'à obtenir 6 nombres sur Δ : obtenez-vous des nombres premiers ?

Nombres chanceux

On dit que 11 est un nombre "chanceux" et que 7 ne l'est pas : cette dénomination est due au mathématicien Euler (1707-1783) qui en cite six : 2 - 3 - 5 - 11 - 17 et 41.
Recommencez une spirale avec 17 au centre (16 nombres premiers sur Δ) et si vous en avez le courage, recommencez avec 41 (40 nombres premiers sur Δ).

Une formule pour trouver des nombres premiers :

a étant un nombre "chanceux" d'Euler : $f(n) = a + n + n^2$

f(n) est un nombre premier pour n prenant les valeurs entières de 1 à (a – 2).