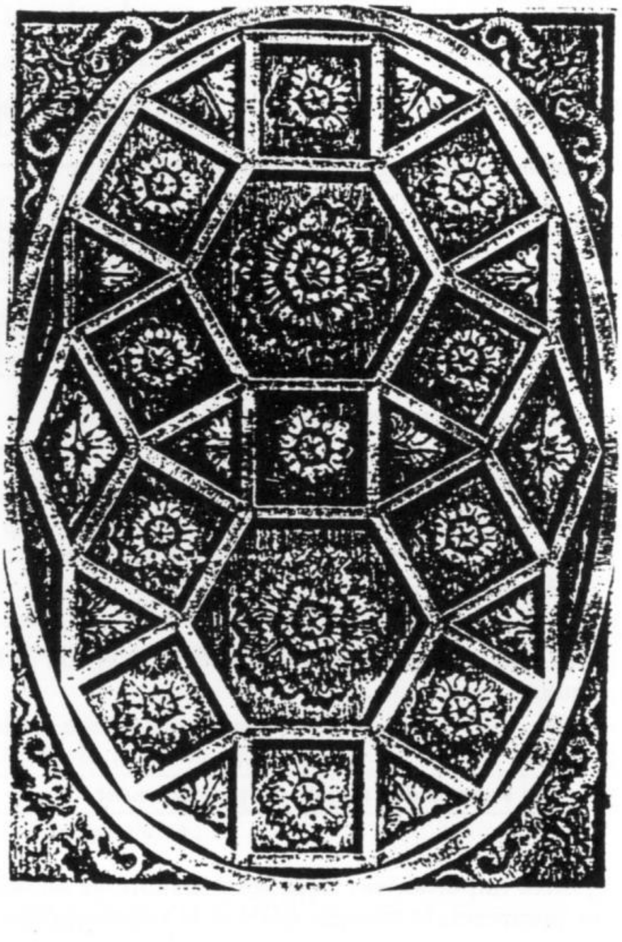
GALION THÈMES

Polygones réguliers

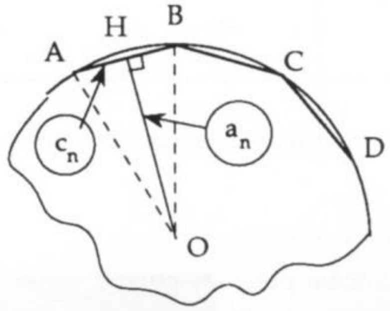


15, quai André Lassagne – 69001 LYON
1993

1 Pour faire les présentations ...

➪ Généralités

Un cercle étant partagé en n arcs de même mesure : $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \ldots$, si l'on trace les segments consécutifs [AB], [BC], ... on obtient un **polygone convexe régulier** de n côtés, inscrit dans le cercle.



- Tous les *angles au centre* sont égaux → $\boxed{\widehat{AOB} = \theta_n = \dfrac{360°}{n}}$
- Tous les côtés ont la même longueur : AB = BC = CD = ...

  On désigne par c_n cette longueur commune → $\boxed{AB = c_n}$
- Le centre O du cercle est à égale distance de tous les côtés.

  Cette distance, telle que OH, est appelée *apothème* du polygone régulier que l'on désigne par a_n → $\boxed{OH = a_n}$
- Tous les angles du polygone sont égaux : $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \ldots$

  Leur mesure commune est notée α_n → $\boxed{\alpha_n = \widehat{ABC}}$

Propriété (1) $\boxed{\alpha_n = \dfrac{(n-2)\,180°}{n}}$ (propriété à démontrer)

➡ Dans tout polygone régulier, les n côtés sont égaux et les n angles sont égaux.

Propriété (2) $\boxed{\text{La somme des angles du polygone est } (n-2)\,180°}$

➡ **Des égalités importantes :** Vous les démontrerez en utilisant, pour les trois premières, le triangle AOH et la trigonométrie.

R est le rayon du cercle circonscrit au polygone régulier.

(3) $\boxed{\dfrac{1}{4}\,c_n^2 + a_n^2 = R^2}$ (4) $\boxed{c_n = 2R\sin\left(\dfrac{180°}{n}\right)}$ (5) $\boxed{a_n = R\cos\left(\dfrac{180°}{n}\right)}$

Le périmètre → $\boxed{p_n = n\,c_n}$ L'aire → $\boxed{S_n = \frac{1}{2}\,p_n\,a_n}$

Pour simplifier l'expression "polygone régulier convexe", nous la remplacerons souvent par P.R.C.

➪ Polygones réguliers étoilés

À l'activité 3, vous verrez comment, après avoir construit un P.R.C. de n côtés, et en joignant les points d'une certaine façon vous pouvez, dans certains cas, construire un **polygone régulier étoilé** de n côtés (désigné par P.R.E.).

➪ Les noms

Comme pour les polyèdres, le nom d'un polygone régulier évoque le nombre de ses côtés : on utilise un préfixe $\boxed{///}$ avant $\boxed{\text{GONE}}$.

Exemple : n = 6 : $\boxed{\text{hexa}}\boxed{\text{GONE}}$

nombre de côtés	5	6	7	8	9	10	12	20
$\boxed{///}$	penta	hexa	hepta	octo	nona	déca	dodéca	icosa

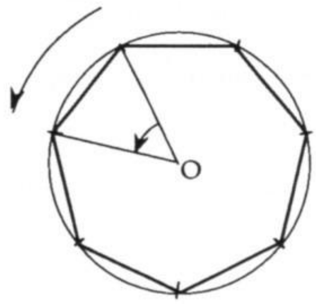
Pour n = 3, la tradition veut que l'on parle de *triangle équilatéral* et non de … trigone, et pour n = 4, on dit *carré* … et non tétragone, qui est une variété d'épinards !

➪ Les rotations

Si vous faites subir au P.R.C. de n côtés, une rotation de centre O, d'angle égal à $\frac{360°}{n}$, dans un sens quelconque, le polygone se superpose à lui-même : on dit qu'il est *globalement invariant* par cette rotation.

Il en est de même pour toute rotation dont l'angle est 2 fois, 3 fois, … k fois cet angle au centre.

Essayez avec un papier calque …



➪ La construction

Depuis les géomètres grecs de l'Antiquité, les mathématiciens ont cherché à ***construire à la règle et au compas*** (sans rapporteur …) un P.R.C. de n côtés.

Nous évoquerons ce problème tout au long de ces activités, et verrons en particulier la contribution du mathématicien Gauss.

Voir le livre de J.-C. Carrega, "La règle et le compas" - Éditions Hermann, 1981.

2 Des faux amis ...

✲ Le quadrilatère ABCD a ses quatre côtés égaux : peut-on l'inscrire dans un cercle ? Est-ce un polygone régulier ?

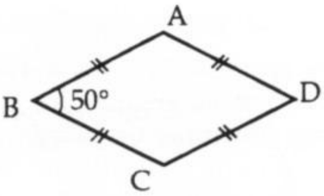


Figure 1

✲ Les sommets de l'octogone ABCDEFGH sont obtenus en partageant en trois segments égaux les côtés d'un carré. Ses angles ont-ils même mesure ? Et ses côtés ?

Est-il inscriptible dans un cercle ?

Est-ce un octogone régulier ?

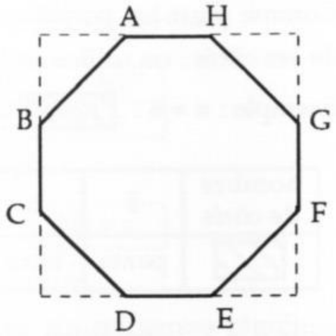


Figure 2

✲ La figure (3) est constituée de deux carrés et trois triangles équilatéraux.

Les côtés de l'heptagone ABCDEFG sont égaux : pourquoi ? Et les angles ?

Est-ce un heptagone régulier ?

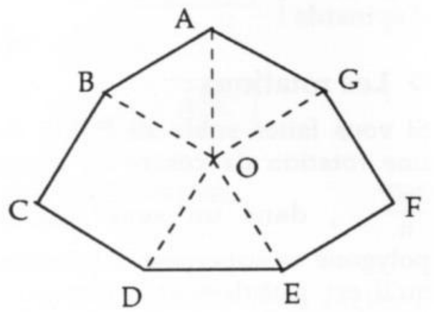


Figure 3

Tout cela pour bien comprendre que les conditions sur les **côtés** et sur les **angles** sont **toutes** indispensables pour parler de polygone régulier.

✲ Sur la figure (4) on a dessiné deux triangles équilatéraux.

Que pouvez-vous dire des angles et des côtés ?

Est-ce un hexagone régulier étoilé ?

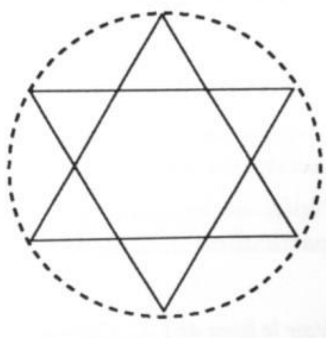


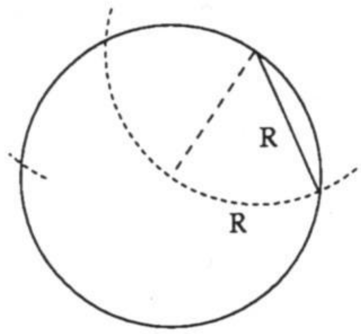
Figure 4

3 — 6 - 12 - 24 ...

6

Tout le monde sait construire un **hexagone régulier** inscrit dans un cercle : il suffit de tracer des cordes égales au rayon du cercle.

- Faites vous-même cette construction et justifiez-la.
- Calculez l'angle de l'hexagone régulier.
- Calculez c_6, a_6 , l'aire et le périmètre de l'hexagone régulier en fonction de R, rayon du cercle.
- Peut-on dessiner un hexagone régulier étoilé ?



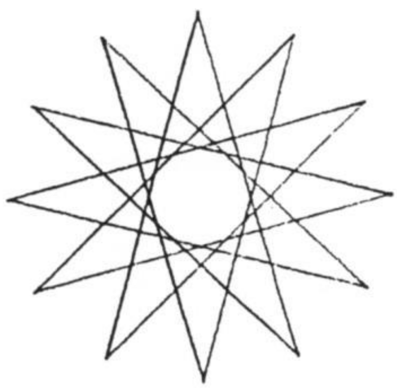
12

- En construisant à la règle et au compas les bissectrices des angles au centre, vous pouvez construire un **dodécagone régulier** convexe.

  Calculez l'angle, puis le côté c_{12}, l'apothème a_{12}, le périmètre et l'aire en fonction de R.
- En joignant d'une certaine façon les points de division, vous pouvez construire un **dodécagone** régulier étoilé; faites ce dessin.

24

- Comment procéder pour construire un P.R.C. de 24 côtés ?



et pour 48 côtés ? ...

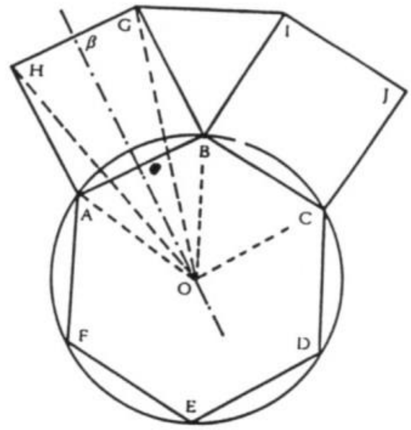
4 Le temple de Diane

Dans les jardins de la Fontaine, à Nîmes, on trouve dans les thermes romains, une pierre sculptée dont nous allons étudier les motifs.

Construire

Tracer un cercle de centre O et de rayon r. Construire un hexagone régulier ABCDEF inscrit dans ce cercle. Construire à l'extérieur comme indiqué sur la figure six carrés de même côté r.

En joignant les douze sommets des carrés, extérieurs au cercle, vous obtenez un dodécagone.



Démontrer et calculer

Vous allez démontrer que ce dodécagone convexe est régulier et étudier cette configuration.

Voici les étapes possibles de cette démonstration.

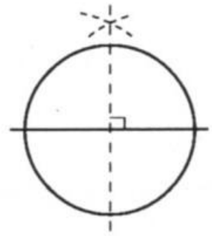
- Quelle est la nature du triangle GBI ?
- Les douze côtés du dodécagone ont même longueur : pourquoi ?
- Calculer $\widehat{HGI}$, $\widehat{GIJ}$,...
- La médiatrice de [AB] est aussi celle de [HG] : démontrez-le.
- Quelle est la nature du triangle HOG ?
- Quelle est la mesure en degrés de $\widehat{HOG}$
- Calculer, en fonction de r, la longueur Oβ, la longueur OG, rayon du cercle circonscrit au dodécagone.
- Trouver la valeur exacte du sinus et du cosinus de 15°, de 75°.
- Calculer de deux façons l'aire du dodécagone en fonction de r.

Sur la couverture de ce fascicule, vous retrouvez deux de ces motifs imbriqués. La rosace du Temple de Diane était constituée par sept de ces motifs.

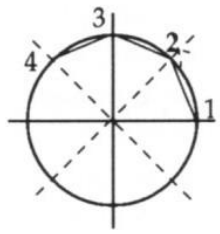
5 Des octogones

Dessiner

Vous savez partager le cercle en quatre quarts de cercle à la règle et au compas, puis en huit arcs de même mesure en traçant des bissectrices.



Ces huit points de division étant construits avec précision, tracez un **octogone convexe régulier** inscrit dans le cercle.



Calculer

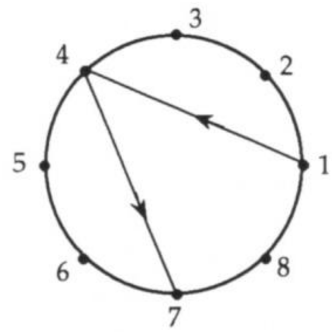
Calculer en degrés l'angle de cet octogone.

Exprimer le côté c_8 , l'apothème a_8 en fonction du rayon et de l'angle au centre.

Octogone étoilé

• Quel polygone obtenez-vous si vous tracez les cordes successives qui *sous-tendent* deux arcs consécutifs : par exemple (1, 3), (3, 5), etc. ?

• Vous allez maintenant tracer les cordes telles que (1, 4), (4, 7), ... c'est-à-dire les cordes successives sous-tendant trois arcs consécutifs.



Revient-on au point de départ ?

Quel est le nombre T de tours effectués pour cela ?

3 x 8 = 24 : au bout de ces 3 tours, le nombre des arcs balayés est 24 : 24 est divisible à la fois par 3 et 8. Vous obtenez un polygone régulier à 8 côtés : c'est encore un octogone régulier, mais il n'est pas convexe, on l'appelle **octogone régulier étoilé**.

Calculez l'angle au centre, puis l'angle de cet octogone.

• En traçant d'autres cordes sous-tendant 4; 5; ... arcs, pouvez-vous dessiner d'autres octogones étoilés ?

6 5 - 10 - 20 ...

5 Voici un programme de dessin :

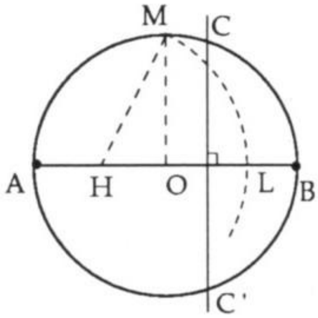
(1) Tracer un cercle de centre O et de rayon R;

(2) Tracer un diamètre [AB]; H est le milieu de [AO];

(3) [OM] est un rayon perpendiculaire à [AB] en O.

(4) Le cercle de centre H et de rayon HM coupe [OB] en L.

(5) Tracer la médiatrice de [OL] : elle coupe le cercle en C et C'.



On démontre que $\widehat{BOC} = \widehat{BOC'} = 72°$. [BC] et [BC'] sont donc deux côtés du pentagone régulier convexe.
Achever la construction de ce pentagone inscrit dans le cercle.
Pouvez-vous construire un P.R.E. de 5 côtés ?

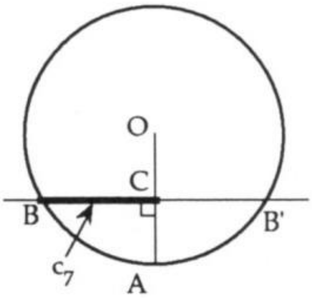
10 Comment construire un P.R.C. de 10 côtés ?

---

7 Pythagore s'est trompé ...

Tracer un cercle de centre O et de 10 cm de rayon, puis un rayon [OA] de ce cercle.

La médiatrice de [OA] coupe le cercle en B et B' et (OA) en C. Un disciple de Pythagore prétendait que BC était le côté d'un heptagone régulier inscrit dans le cercle.

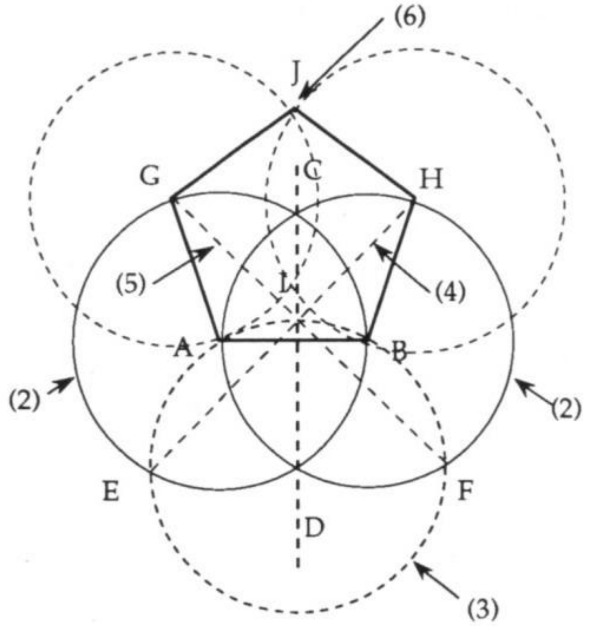


Dessin : Reportez à l'aire du compas sept cordes consécutives de longueur BC. Qu'en pensez-vous ?

Calcul : En vous aidant de la trigonométrie montrez que le pythagoricien se trompait.

8 Construction de Dürer pour un pentagone régulier

Voici un programme de construction à exécuter avec précision :



(1) Tracer un segment [AB].

(2) Tracer le cercle Γ_1 de centre A et de rayon AB, puis le cercle Γ_2 de centre B, de rayon BA. Ils se coupent en C et D.

(3) Tracer le cercle de centre D et de rayon DA. Il recoupe le cercle Γ_1 en E et Γ_2 en F. Il coupe (CD) en I.

(4) Tracer (EI) qui coupe le cercle Γ_2 en H.

(5) Tracer (FI) qui coupe le cercle Γ_1 en G.

(6) Marquer J, intersection du cercle de centre G, de rayon GA et du cercle de centre H, de rayon HB.

Montrer que ABHJG est un pentagone dont les cinq côtés ont même longueur. Cependant, on démontre que les angles de ce pentagone ne sont pas égaux : la différence entre les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{BHJ}$ n'est que 0,4° environ ...

Cette construction (fausse ...) est due à Dürer (1471-1528). Elle est tout de même très satisfaisante pour le peintre ou le graveur : l'utilisation d'une seule mesure de rayon pour les tracés fait qu'elle est plus facile et plus rapide que la construction indiquée à l'activité 6.

9 Pentagones et Nombre d'Or

ABCDE est un pentagone régulier convexe.

ACEBD est un pentagone régulier étoilé.

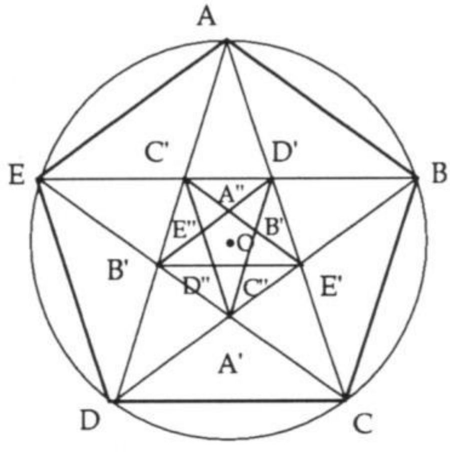
O est le centre du cercle circonscrit à ces deux pentagones.

⇨ Un peu de calcul

Combien mesure l'angle du pentagone convexe ? Et celui du pentagone étoilé ?

Calculer la mesure de chacun des angles du triangle AC'E. Que peut-on dire de ce triangle ?

Mêmes questions pour les triangles AC'D' et AEB'.



En traçant les diagonales d'un pentagone convexe régulier, on obtient un petit pentagone étoilé, délimitant lui-même un pentagone convexe encore plus petit.

On peut démontrer que A'B'C'D'E' est encore un pentagone régulier convexe et que A'D'B'E'C' est un pentagone régulier étoilé.

Prouver que les triangles B'DE' et A'B'E' sont des triangles isocèles.

⇨ De différence en différence

➨ Démontrer que AD – AE = B'E' , autrement dit :

$$\begin{pmatrix}\text{côté du grand}\\ \text{pentagone}\\ \text{étoilé ACEBD}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{côté du grand}\\ \text{pentagone}\\ \text{convexe ABCDE}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{côté du petit}\\ \text{pentagone}\\ \text{étoilé A'D'B'E'C'}\end{pmatrix}$$

➨ Démontrer que AE – B'E' = A'B' , autrement dit :

$$\begin{pmatrix}\text{côté du grand}\\ \text{pentagone}\\ \text{convexe ABCDE}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{côté du petit}\\ \text{pentagone}\\ \text{étoilé A'D'B'E'C'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{côté du petit}\\ \text{pentagone}\\ \text{convexe A'B'C'D'E'}\end{pmatrix}$$

➨ A"B"C"D"E" est un pentagone régulier convexe et on peut démontrer que B'E' – B'A' = A"E".

Les soustractions successives ne s'arrêtent jamais !

Cette constatation avait beaucoup troublé les Grecs.

➯ Où l'on retrouve le nombre d'Or

Dans toute la suite nous supposerons que le rayon du cercle circonscrit au pentagone régulier ABCDE est égal à 1.

Le rayon [OE] coupe [AD] en I.

- Démontrer que I est le milieu de [AD] et que (OE) est perpendiculaire à (AD).
- En déduire que $AD = 2 \sin 72°$ et que $AE = 2 \sin 36°$.
- Sachant que $\sin 72° = 2 \sin 36° . \cos 36°$, montrer que :

$$\frac{AD}{AE} = 2 \cos 36° \quad \text{et donc que} \quad \frac{AD}{DC} = 2 \cos 36° \ .$$

- Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du quotient $\frac{AD}{DC}$.

  Ce nombre $2 \cos 36°$ est appelé **Nombre d'Or**, que l'on notera α.

  Sa valeur exacte est : $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

- Prouver que les droites (DC), (B'E') et (EB) sont parallèles. En utilisant le théorème de Thalès, démontrer que

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB'}{B'E'} \quad \text{et en déduire que} \quad \frac{DC}{B'E'} = \alpha \ .$$

  De même, démontrer que

$$\frac{B'E'}{C'D'} = \frac{AB'}{AC'} \quad \text{et en déduire que} \quad \frac{B'E'}{C'D'} = \alpha \ .$$

- Ainsi on a démontré que :

$$\frac{\text{côté du grand pentagone étoilé}}{\text{côté du grand pentagone convexe}} = \frac{\text{côté du grand pentagone convexe}}{\text{côté du petit pentagone étoilé}} = \alpha \ .$$

(Voir Galion Thèmes : "Le nombre d'Or").

10 Peut-on le construire à la règle et au compas ?

➥ Vous savez que, par des tracés de bissectrices, vous pouvez doubler le nombre des côtés du P.R.C. inscrit dans un cercle.

⇨ $\boxed{\text{On sait construire un carré}}$ $n = 4 = 2^2$

→ donc on sait construire un octogone : $n = 4 \times 2 = 8 = 2^3$

un polygone à 16 côtés : $n = 2 \times 8 = 2^4$ …

On sait donc construire tous les P.R.C. à $\boxed{n = 2^k}$ côtés.

⇨ $\boxed{\text{On sait construire un triangle équilatéral}}$ $n = 3$

→ donc on sait construire un hexagone : $n = 3 \times 2$

un dodécagone : $n = 3 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^2$

On sait donc construire tous les P.R.C. à $\boxed{n = 3 \times 2^k}$ côtés.

⇨ $\boxed{\text{On sait construire un pentagone régulier convexe}}$ $n = 5$

→ donc on sait construire un décagone : $n = 5 \times 2$

un P.R.C. à 20 côtés : $n = 5 \times 2^2$

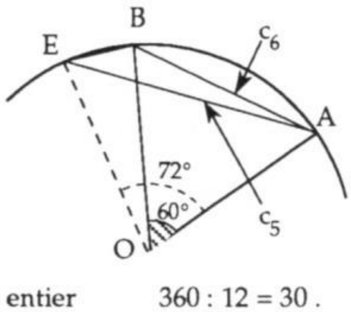
… et tous les P.R.C. à $\boxed{n = 5 \times 2^k}$ côtés.

Comment construiriez-vous à la règle et au compas un P.R.C. de 96 côtés ? de 160 côtés ? de 1024 côtés ?

➥ On peut aussi construire l'angle au centre d'un P.R.C. par différence. Par exemple, sur le cercle, on a construit les côtés

$$AB = c_6 \text{ et } AE = c_5$$

d'où $\widehat{AOB} = 60°$; $\widehat{AOE} = 72°$.



Par différence : $\widehat{BOE} = 72° - 60° = 12°$.

Or, il se trouve que le quotient de 360 par 12 est entier $360 : 12 = 30$.

La corde [BE] que l'on vient de construire est donc le côté du P.R.C. de 30 côtés : c_{30} = BE. On sait donc construire le P.R.C. à 30 côtés.

- Vérifiez que, par cette méthode, les tracés de c_4 et de c_3 permettent d'obtenir c_{12} ; les tracés de c_{10} et de c_6 permettent d'obtenir c_{15}.
- Les tracés de c_8 et de c_5 donnent-ils un côté d'un P.R.C. ? et ceux de c_{10} et c_4 ?
- Pouvez-vous, par cette méthode, construire c_{60} ? et c_{40} ? et c_{48} ?

11 Pour aller plus loin avec Gauss

À 19 ans, ce génial mathématicien de Göttingen s'intéressait déjà à la construction des polygones réguliers à la règle et au compas.

Toutes les constructions que nous venons de passer en revue étaient connues depuis fort longtemps, on peut dire depuis les géomètres grecs, Euclide en particulier. Deux mille ans plus tard, en 1796, Gauss démontre que l'on peut construire à la règle et au compas un polygone de 17 côtés et plus généralement que si $n = 2^{(2^k)} + 1$, on sait construire le P.R.C. de n côtés.

En donnant à k les valeurs 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6, trouver ces nombres n.

BILAN

- Sachant construire le P.R.C. avec n = 3, vous savez le construire pour 3 x 2; 3 x 4; ...

  Entourez de rouge ces entiers sur le tableau final ci-dessous.

  De même en partant de 4, de 5, de 15. Même question en partant des nombres trouvés par Gauss (voir ci-dessus ...)

- On a démontré que pour n = 7 ; 9 ; 11 ; 13, la construction à la règle et au compas est impossible : barrez les cases correspondantes et si la construction est impossible pour 7, il en est de même pour 7 x 2 ; 7 x 4 ; ... encore des cases à barrer ...

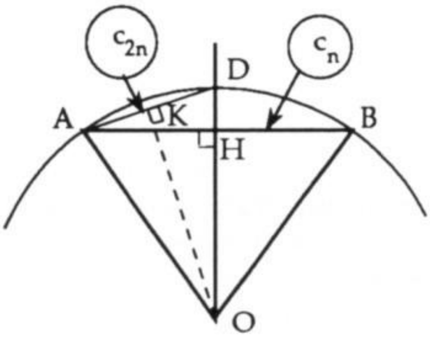
  Il reste encore des nombres n pour lesquels vous ne pouvez pas conclure ...

  Ce problème d'apparence simple nécessite des connaissances mathématiques plus élaborées.

		3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

12 On double le nombre de côtés

Si [AB] est un côté de longueur c_n, du polygone régulier inscrit de n côtés dans le cercle de centre O, vous savez qu'en traçant la bissectrice de $\widehat{AOB}$, qui coupe $\overset{\frown}{AB}$ en D, alors [AD] et [DB] sont des côtés du polygone régulier dont le nombre de côtés est double, c'est-à-dire égal à 2n.



⇨ **Problème : Quelle est la relation entre les longueurs c_n et c_{2n} ?**

La recherche de cette relation repose sur l'idée suivante : écrire de deux façons l'aire du triangle OAD. On supposera ici que R = 1 pour simplifier.

Aire (OAD) = $\frac{1}{2}$ OD x AH = $\frac{c_n}{4}$; Aire (OAD) = $\frac{1}{2}$ OK x AD = $\frac{1}{2}$ OK x c_{2n}

Or, dans OKD on a : $OK = \sqrt{OD^2 - \frac{AD^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{c_{2n}^2}{4}}$

On a alors : $c_n = c_{2n}\sqrt{4 - c_{2n}^2}$ d'où l'on tire l'égalité :

$$\boxed{c_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}}}$$

... mais c'est assez difficile à montrer ... nous l'admettrons ...

⇨ **Utiliser ce résultat.** On prendra toujours un cercle de rayon R = 1.

✦ $\boxed{n = 3}$ Le côté du triangle équilatéral inscrit est $c_3 = \sqrt{3}$: expliquez pourquoi. En utilisant l'égalité ci-dessus, retrouvez c_6.

Calculez c_{12}, côté du dodécagone inscrit, puis c_{24}.

✦ $\boxed{n = 4}$ Le côté du carré inscrit dans le cercle est $c_4 = \sqrt{2}$. Déduisez-en c_8, puis c_{16} et (... c'est plus difficile !) c_{32}, c_{64} ...

✦ $\boxed{n = 5}$ Le côté du pentagone régulier convexe est :

$c_5 = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Trouvez alors le côté c_{10}.

⇨ **Demi-périmètre**

Calculez les valeurs approchées avec 4 décimales des côtés puis des demi-périmètres des polygones réguliers inscrits de : 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128 côtés (R = 1).

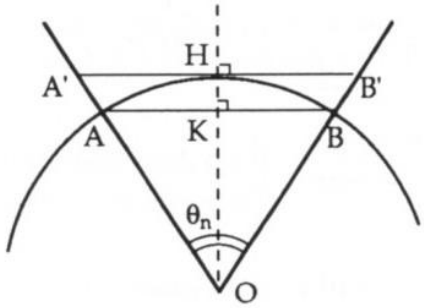
C'est curieux, non ... ?

13 Vers le nombre π

On suppose toujours que le rayon du cercle est R = 1.

On a construit un polygone régulier convexe de n côtés : [AB] est l'un de ses côtés. Son périmètre est p_n . $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre.

(A'B') est tangente au cercle en H, milieu de l'arc $\widehat{AB}$: [A'B'] est un côté du polygone régulier **circonscrit** au cercle. Son périmètre est désigné par p'_n .



✱ En utilisant ce que nous avons vu aux pages 2 et 3, justifiez chacune des égalités qui suivent :

$$\theta_n = \widehat{AOB} = \frac{360°}{n} \; ; \qquad \widehat{AOK} = \widehat{A'OH} = \frac{180°}{n}$$

$$c_n = AB = 2 \sin \frac{180°}{n} \; ; \qquad c'_n = A'B' = 2 \tan \frac{180°}{n}$$

$$p_n = 2n \sin \frac{180°}{n} \; ; \qquad p'_n = 2n \tan \frac{180°}{n}$$

Demi-périmètre du polygone inscrit de n côtés :	$\frac{1}{2}\,p_n = n \sin \frac{180°}{n}$
Demi-périmètre du polygone circonscrit de n côtés :	$\frac{1}{2}\,p'_n = n \tan \frac{180°}{n}$

✱ À vos calculatrices !

En prenant, au départ n = 6, et en doublant chaque fois le nombre des côtés, donnez une valeur approchée à 10^{-5} de chacun des demi-périmètres $\frac{1}{2}\,p_n$ et $\frac{1}{2}\,p'_n$. Notez vos résultats dans ce tableau.

Recommencez avec n = 100 au départ ...

Comme à la page précédente, il se passe une chose curieuse que vous essayerez d'expliquer.

n	$\frac{1}{2}\,p_n$	$\frac{1}{2}\,p'_n$
6		
12		
24		
48		
96		
192		

14 Vers les étoilés

Vous avez vu comment tracer un P.R.E. à cinq côtés et un P.R.E. à huit côtés. Il n'y a pas de P.R.E. à 3, 4 ou 6 côtés : il vous est facile de le vérifier.

$\boxed{n = 7}$ Il y a deux heptagones réguliers étoilés.
Tracez-les en utilisant votre rapporteur pour les angles au centre.

$\boxed{n = 16}$ Il y a quatre polygones réguliers étoilés de 16 côtés.
Tracez quatre cercles, chacun d'eux étant partagé en 16 arcs égaux. Soit p le nombre d'arcs sous-tendus par une corde : faîtes les tracés pour $p = 3$, $p = 5$; $p = 7$; $p = 6$.
Précisez chaque fois le nombre de tours pour revenir au départ.
Que se passe-t-il pour $p = 4$? Pourquoi s'arrête-t-on à $p = 7$?

Plus difficile :

Combien peut-on trouver de polygones réguliers étoilés pour $n = 24$? et pour $n = 45$?

Formulaire

Résumé sur les polygones réguliers convexes.

R : rayon du cercle circonscrit.

n	angle au centre	côté	apothème
3	120°	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$
4	90°	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$
5	72°	$\frac{R}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$	$\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$
6	60°	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$
8	45°	$R\sqrt{(2-\sqrt{2})}$	$\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
10	36°	$\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
12	30°	$R\sqrt{(2-\sqrt{3})}$	$\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$