Durée de l'épreuve : 3 heures – Coefficient 2

Sciences Po - 24 février 2018

Le problème est noté sur 8, l'exercice Vrai-Faux est noté sur 12.
Vous devez traiter les deux exercices. Les calculatrices sont autorisées.

Problème

Partie A

La fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

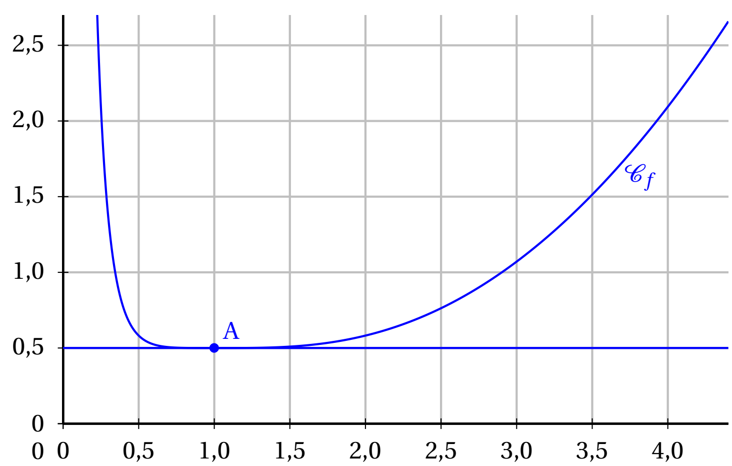
$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2} - \left(\ln(x)\right)^2$$

où a et b désignent deux réels.

1. f' désignant la dérivée de la fonction f, montrer que pour tout x strictement positif :

$$f'(x) = 2ax - \frac{2b}{x^3} - 2\frac{\ln(x)}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé :



La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A (1 ; 0,5) et admet une tangente horizontale en ce point.

2. Déterminer les réels a et b.

Partie B

1. Factoriser l'expression $2X^2 - 4X + 2$ et en déduire une factorisation de l'expression $2x^4 - 4x^2 + 2$.
2. À l'aide de la question précédente, déterminer le signe de l'expression $2x^4 - 4x^2 + 2$ en fonction de x, où x désigne un nombre réel.

Partie C

On considère la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x.$$

1. Déterminer le sens de variation de g sur $]0~;~+\infty[$ (on pourra utiliser la partie **B**).
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie D

Dans la suite du problème, f désigne la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - \left(\ln(x)\right)^2.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en zéro.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{1}{2x}g(x)$.

   En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$.

Partie E

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $]0~;~1]$. On pourra considérer la fonction h définie sur $]0~;~1]$ par $h(x) = f(x) - x$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{x}$ admet une unique solution β sur $]1~;~+\infty[$.
3. Montrer que $\alpha \times \beta = 1$.
4. **a.** Écrire un algorithme permettant d'afficher un encadrement de α à 10^{-2} près.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice : Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1. Un capital est placé au taux annuel de 3 % pendant 20 ans, à intérêts composés.

   Affirmation : la somme disponible au bout de 20 ans est supérieure ou égale au double du capital placé.
2. Une urne contient trois boules indiscernables au toucher portant respectivement les numéros 1, 2 et 3.

   On tire successivement trois fois une boule avec remise.

   On note N la variable aléatoire donnant le nombre de numéros différents obtenus.

   Affirmation : L'espérance de N est strictement supérieure à $\dfrac{3}{2}$.

3. Une entreprise produit en grande série des véhicules électriques.
On admet que la probabilité qu'un véhicule ne soit pas conforme vaut 0,03.
On prélève au hasard un lot de 100 véhicules en vue de les proposer à la location dans une grande agglomération (on admet que la population est suffisamment importante pour assimiler la constitution de ce lot à 100 tirages successifs avec remise).
Affirmation : la probabilité qu'aucun véhicule de ce lot ne soit défectueux est égal à $1-0,03^{100}$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles définies par $u_n = 2+\left(2+2^2+\ldots+2^n\right) = 2+\sum_{k=1}^{n} 2^k$ et $v_n = u_n - 1$.
Affirmation : une seule des deux suites est géométrique.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim_{n\to+\infty} nu_n = \ell$.
Affirmation : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

6. La suite u_n est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$.
Affirmation : pour tout entier naturel n, $u_n = n+1$.

7. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- Pour tout réel x, $f(x) > g(x)$

Affirmation : $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = +\infty$

8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.
Affirmation : pour tout réel x,

$$f(2x) = \frac{2f(x)}{1+\left(f(x)\right)^2}$$

9. On donne $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
Affirmation : $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

10. Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.
Soit a un réel strictement positif et A le point de la parabole d'abscisse a.
On note B le second point d'intersection entre la parabole et la perpendiculaire à la droite (OA) passant par O.
Affirmation : quelle que soit la valeur de $a > 0$, K (0 ; 1) appartient à la droite (AB).