Baccalauréat spécialité

L'intégrale de mai à septembre 2024

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

À la fin index des notions abordées

∽ Baccalauréat Amérique du Nord 21 mai 2024 ∾

Jour 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.
Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

— la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;

— si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;

— si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet. On note :

- R l'évènement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'évènement « le joueur tire une épée » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires des évènements R et E.

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.

2. Calculer la probabilité de tirer une épée.

3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millième.

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.

2. Déterminer $P(X < 6)$. Arrondir le résultat au millième.

3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.

Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à 0,95.

Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.

EXERCICE 2 — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les quatre questions sont indépendantes.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. On considère les points A(1 ; 0 ; 3) et B(4 ; 1 ; 0).
   Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

   a. $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&3+t\\y&=&1\\z&=&-3+3t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$ **b.** $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&1+4t\\y&=&t\\z&=&3\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

   c. $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&1+3t\\y&=&t\\z&=&3-3t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$ **d.** $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&4+t\\y&=&1\\z&=&3-3t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

   On considère la droite (d) de représentation paramétrique
   $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&3+4t\\y&=&6t\\z&=&4-2t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

2. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite (d) ?

   a. M(7 ; 6 ; 6) **b.** N(3 ; 6 ; 4) **c.** P(4 ; 6 ; −2) **d.** R(−3 ; −9 ; 7)

3. On considère la droite (d') de représentation paramétrique
   $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&-2+3k\\y&=&-1-2k\\z&=&1+k\end{array}\right.$ avec $k \in \mathbb{R}$
   Les droites (d) et (d') sont :

   a. sécantes **b.** non coplanaires **c.** parallèles **d.** confondues

4. On considère le plan (P) passant par le point I(2 ; 1 ; 0) et perpendiculaire à la droite (d).
   Une équation du plan (P) est :

   a. $2x+3y-z-7=0$ **b.** $-x+y-4z+1=0$
   c. $4x+6y-2z+9=0$ **d.** $2x+y+1=0$

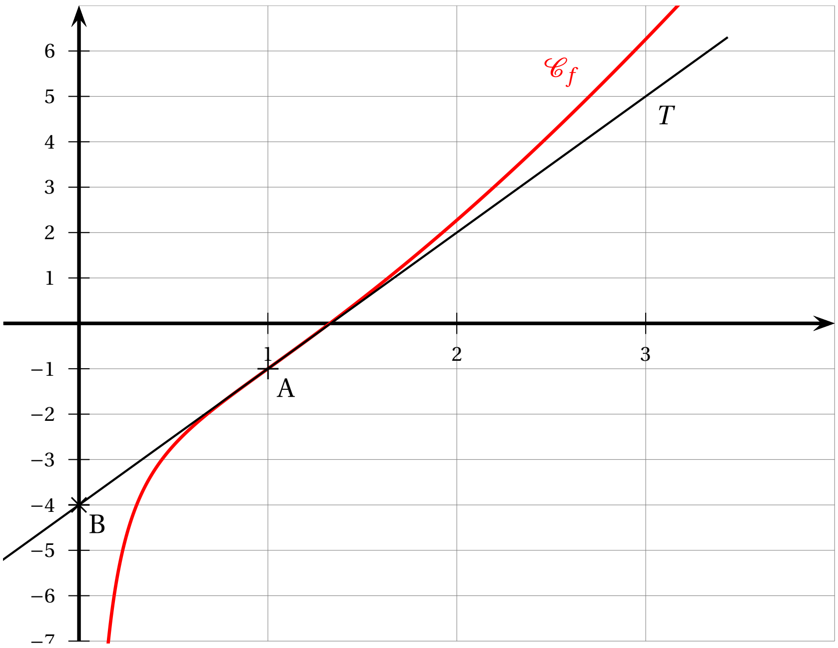
EXERCICE 3 — 5 points

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1~;~-1)$.
Cette tangente passe également par le point B$(0~;~-4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
   Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,
   $$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$
3. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :
   $$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Exercice 4 — 6 points

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0.

2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

c. Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$$

c. Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).

4. **a.** En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$I_n = \frac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.

Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1 from math import *
2 def seuil() :
3     n = 0
4     I = 2
5     ...
6         n = n+1
7         I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8     return n
```

∽ Baccalauréat Amérique du Nord - 22 mai 2024 ∾

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 **5 points**

Les données publiées le 1er mars 2023 par le ministère de la transition écologique sur les immatriculations de véhicules particuliers en France en 2022 contiennent les informations suivantes :

— 22,86 % des véhicules étaient des véhicules neufs ;

— 8,08 % des véhicules neufs étaient des hybrides rechargeables ;

— 1,27 % des véhicules d'occasion (c'est-à-dire qui ne sont pas neufs) étaient des hybrides rechargeables.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au dix-millième.

Partie A

Dans cette partie, on considère un véhicule particulier immatriculé en France en 2022.
On note :

— N l'évènement « le véhicule est neuf » ;

— R l'évènement « le véhicule est hybride rechargeable » ;

— $\overline{N}$ et $\overline{R}$ les évènements contraires des évènements contraires de N et R.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable.
3. Démontrer que la valeur arrondie au dix-millième de la probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est 0,028 3.
4. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable.

Partie B

Dans cette partie, on choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022.
Dans la suite, on admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.
On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.
On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs.
3. Déterminer la probabilité $p(X \geqslant 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

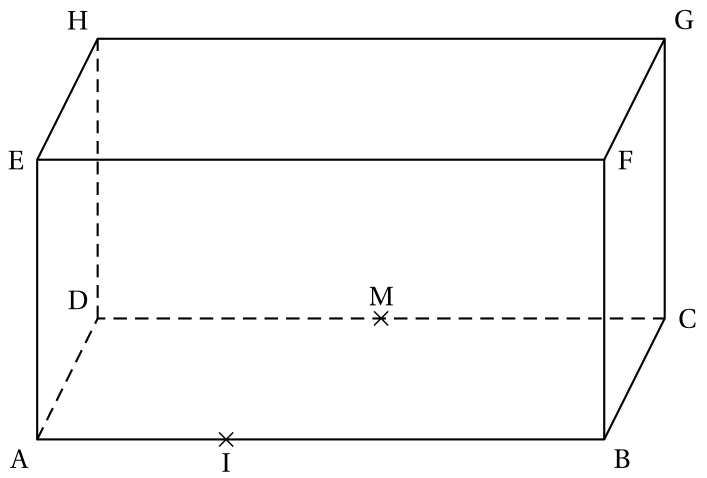
On choisit désormais n véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022, où n désigne un entier naturel strictement positif.
On rappelle que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.
On assimile le choix de ces n véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

1. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n que tous ces véhicules soient d'occasion.

2. On note q_n la probabilité qu'au moins un de ces véhicules soit neuf. En résolvant une inéquation, déterminer la plus petite valeur de n telle que $q_n \geqslant 0,9999$.

Exercice 2 — 5 points

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que AB = 3 et AD = AE = 1 représenté ci-dessous.



On considère le point I du segment [AB] tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment [CD].

On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :

$$2x + 6y + 3z - 9 = 0.$$

c. Le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).

4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).
Déterminer les coordonnées du point N.

5. Le point R de coordonnées $\left(3 ; \dfrac{1}{4} ; \dfrac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ? Justifier la réponse.

Exercice 3 — 6 points

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & g\left(u_n\right)\end{array}\right.$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1 et u_2.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln\left(1 - u_n\right)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
7. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.
9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.5
    while u < 0.95 :
        n = ...
        u = ...
    return n
```

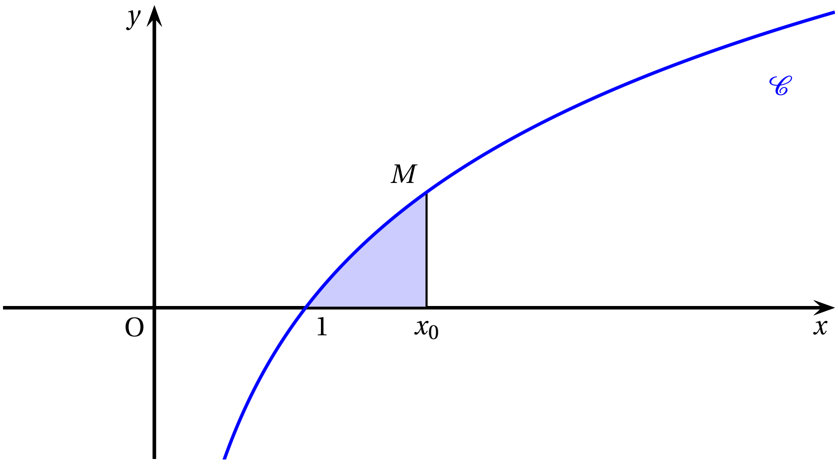
Exercice 4 **4 points**

Soit a un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

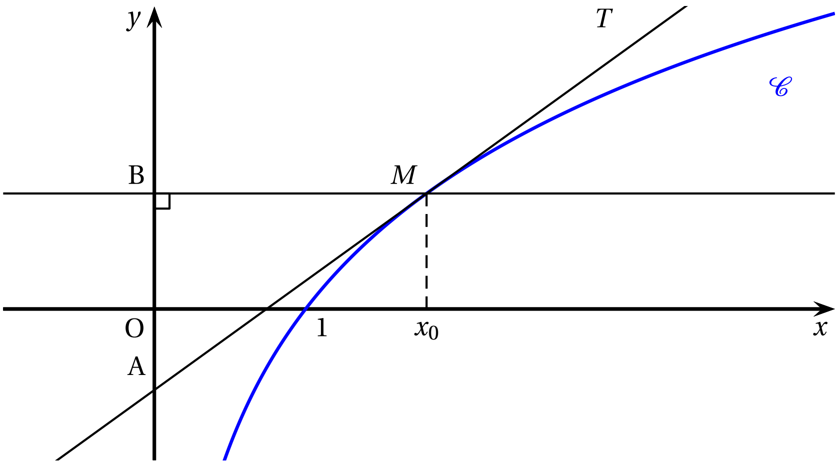
$$f(x) = a\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a[x\ln(x) - x]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de a et de x_0.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.
Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.

∽ Baccalauréat Centres étrangers [1] 5 juin 2024 ∾

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03}.$$

1. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$f'(x) = \frac{0{,}0288}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}.$$

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie B

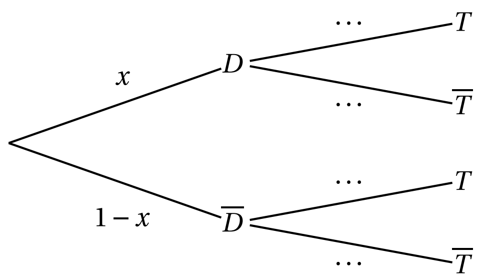
La lutte contre le dopage passe notamment par la réalisation de contrôles antidopage qui visent à déterminer si un sportif a fait usage de substances interdites.
Lors d'une compétition rassemblant 1 000 sportifs, une équipe médicale teste tous les concurrents. On propose d'étudier la fiabilité de ce test.
On appelle x le réel compris entre 0 et 1 qui désigne la proportion de sportifs dopés.
Lors de l'élaboration de ce test, on a pu déterminer que :

- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il est dopé est égale à 0,96 ;
- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il n'est pas dopé est égale à 0,03.

On note :

- D l'évènement : « le sportif est dopé ».
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Déterminer, en fonction de x, la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif.

1. Europe

3. Démontrer que la probabilité de l'évènement T est égale à $0{,}93x + 0{,}03$.

4. Pour cette question uniquement, on suppose qu'il y a 50 sportifs dopés parmi les 1 000 testés.

La fonction f désigne la fonction définie à la partie A.

Démontrer que la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est égale à $f(0{,}05)$. *En donner une valeur arrondie au centième.*

5. On appelle valeur prédictive positive d'un test la probabilité que le sportif soit réellement dopé lorsque le résultat du test est positif.

a. Déterminer à partir de quelle valeur de x la valeur prédictive positive du test étudié sera supérieure ou égale à 0,9. Arrondir le résultat au centième.

b. Un responsable de la compétition décide de ne plus tester l'ensemble des sportifs, mais de cibler les sportifs les plus performants supposés être plus fréquemment dopés.

Quelle est la conséquence de cette décision sur la valeur prédictive positive du test ?

Argumenter en utilisant un résultat de la partie A.

EXERCICE 2 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. **a.** Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

b. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$f'(x) = 2(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

c. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.

4. **a.** Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln(2) - u_n$ est positif.

b. On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.

Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.1
    while ln (2) − u ... 0.0001 :
        n = n+1
        u = ...
    return (u, n)
```

c. Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction seuil ().

EXERCICE 3 — 5 points

On considère l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).
   On considère l'équation différentielle

   $$(E): \quad y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$

   où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.
3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer :

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2\,\mathrm{e}^{x} + \sin(x) + 2\cos(x)\right] \mathrm{d}x.$$

EXERCICE 4 — 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère :

- les points A$(-2\,;\,0\,;\,2)$, B$(-1\,;\,3\,;\,0)$, C$(1\,;\,-1\,;\,2)$ et D$(0;0;3)$.
- la droite $\mathscr{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& 3t\\ z &=& 3+5t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- la droite $\mathscr{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+3s\\ y &=& -1-5s\\ z &=& 2-6s\end{array}\right.$ avec $s \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

   b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

   $$x + 3y + 5z - 8 = 0.$$

  c. En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. **a.** Justifier que la droite $\mathscr{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.
On admet que la droite $\mathscr{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de C.

  b. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4. **a.** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).

  b. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
Arrondir le résultat au centième.

∽ Baccalauréat Centres étrangers [2] 6 juin 2024 ∾

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.
À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.
Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.
Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est (4; 5; 1).

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. **a.** Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
   b. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.
Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1,X_2, et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.
6. Déterminer $P(S = 24)$.
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
   a. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
   b. En déduire la probabilité de gagner un lot.

EXERCICE 2 **6 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.
   b. En déduire une interprétation graphique.

2. Europe

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f'(x) = \frac{(x-2)\,\mathrm{e}^{x}}{(x-1)^2}.$$

b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f''(x) = \frac{\left(x^2-4x+5\right)\mathrm{e}^{x}}{(x-1)^3}.$$

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

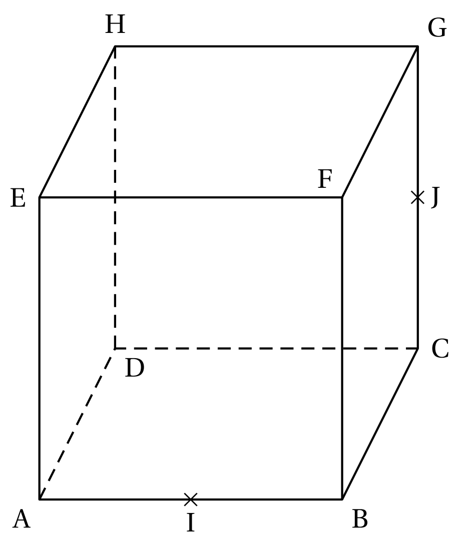
$$\mathrm{e}^{x} \geqslant (-2x-1)(x-1).$$

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

EXERCICE 3 — 5 points

Le cube ABCDEFGH a pour arête 1 cm.
Le point I est le milieu du segment [AB] et le point J est le milieu du segment [CG].



On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{EJ}}$ est normal au plan (FHI).

3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (FHI) est $-2x-2y+z+1=0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EJ).

5. **a.** On note K le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI). Calculer ses coordonnées.

b. Montrer que le volume de la pyramide EFHI est $\dfrac{1}{6}$ cm^3.

On pourra utiliser le point L, *milieu du segment* [EF]. *On admet que ce point est le projeté orthogonal du point* I *sur le plan* (EFH).

c. Déduire des deux questions précédentes l'aire du triangle FHI.

EXERCICE 4 — 4 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}.$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. On considère le script Python ci-dessous :

```
from math import *
def seuil(n) :
    u = 5
    i = 0
    ℓ = (1 + sqrt(5))/2
    while abs(u-ℓ) >= 10**(-n) :
        u = sqrt(u+1)
        i = i+1
    return(i)
```

On rappelle que la commande **abs(x)** *renvoie la valeur absolue de* x.

a. Donner la valeur renvoyée par `seuil` (2).

b. La valeur renvoyée par `seuil` (4) est 9.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

∽ Baccalauréat Asie 10 juin 2024 ∾

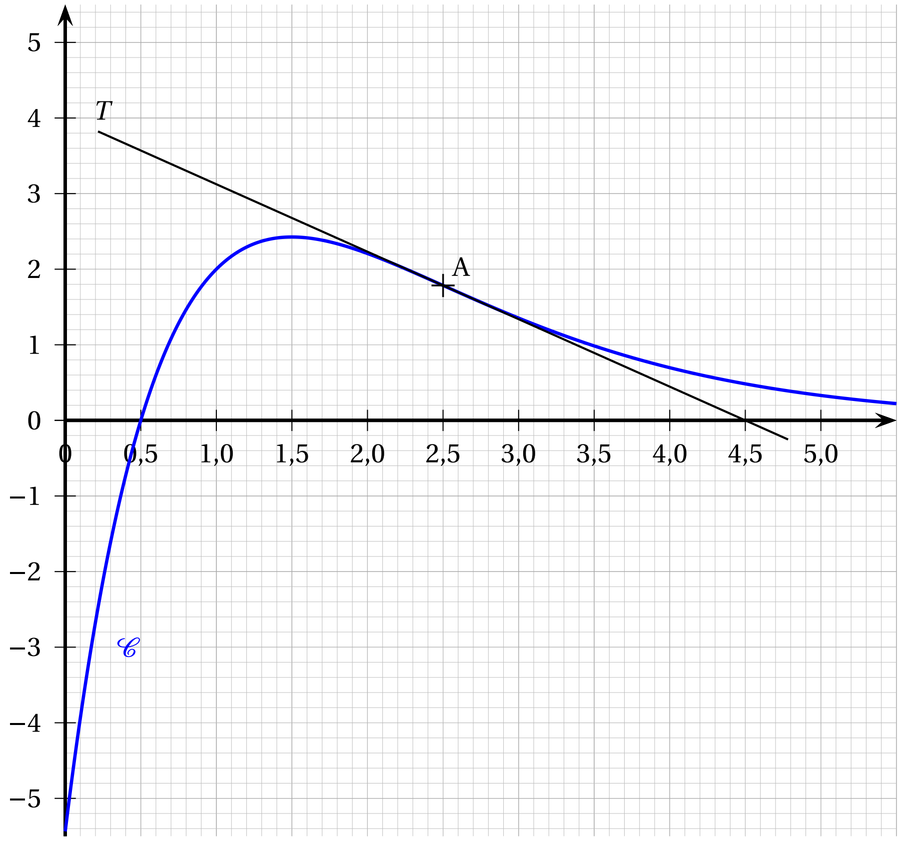
Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

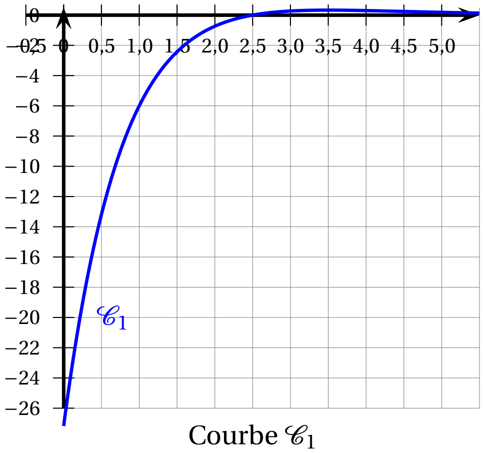
EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

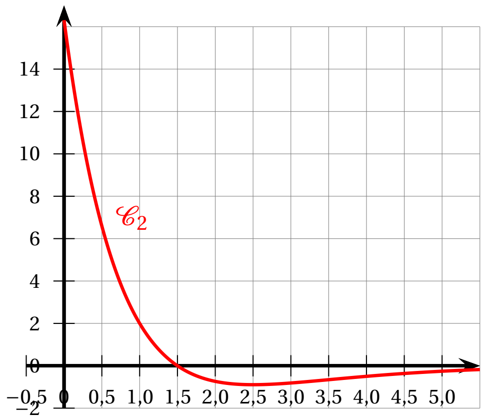
On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.



1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
2. Que semble présenter la courbe $\mathscr{C}$ au point A ?
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.
   Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.
   Ce choix sera justifié.

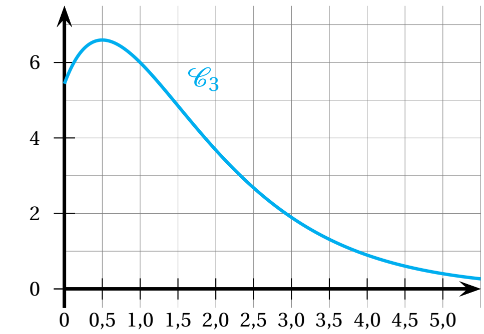


Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

4. La courbe $\mathscr{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0\,;\,+\infty[$ d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, est définie par

$$f(x) = (4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}.$$

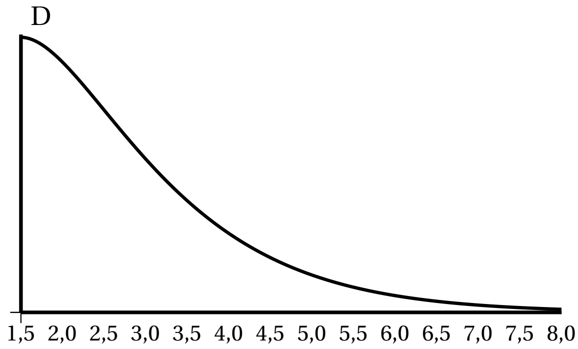
On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f
   - **a.** Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\,\mathrm{e}^{-x+1}$.
   - **b.** Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   - **c.** Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.
2. On considère une fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.
   - **a.** Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   - **b.** On admet que $F(x) = (-4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

     En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

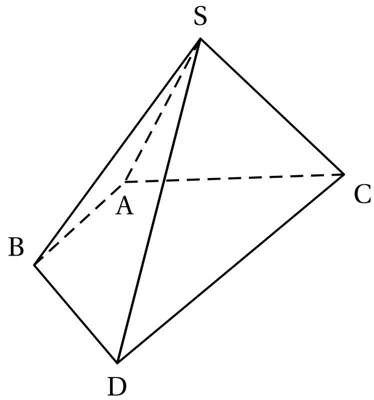
3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.
   Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}\,;\,8\right]$.
   L'unité de longueur est le mètre.



   a. Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.
   b. La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur.
   Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de 0,8 m^2, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.

EXERCICE 2 — 5 POINTS

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points : A$(3\,;\,-1\,;\,1)$; B$(4\,;\,-1\,;\,0)$; C$(0\,;\,3\,;\,2)$; D$(4\,;\,3\,;\,-2)$ et S$(2\,;\,1\,;\,4)$.
Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. **a.** Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
   b. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
   On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.
3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,1\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).
   d. On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
   Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$, puis montrer que SI = 2 cm.
4. **a.** Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées H$(3\,;\,3\,;\,-1)$ et montrer que HB $= 3\sqrt{2}$ cm.
   b. Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.
   On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule

$$\mathscr{A} = \frac{b+B}{2} \times h$$

   où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.

5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

EXERCICE 3 — 5 POINTS

Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.
Source : https ://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667 (21) 00064-5/fulltext
On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
   On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »
   Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?
2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres.
   On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
   a. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   b. Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
   c. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ?
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   d. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ?
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   e. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) > 0,9$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

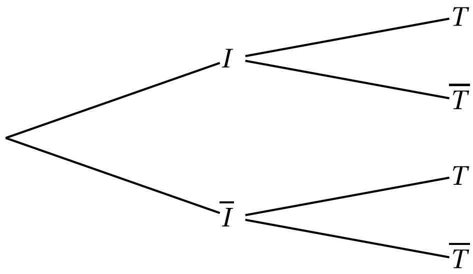
Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection), si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19.
Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.
Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité.
La **sensibilité** d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie. (II s'agit donc d'un vrai positif).
La **spécificité** d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie. (II s'agit donc d'un vrai négatif).
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

— Sa sensibilité est de 0,8.

— Sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note T l'évènement « le test réalisé est positif ».

1. Compléter l'arbre des probabilités ci-dessous avec les données de l'énoncé :



2. Montrer que $p(T) = 0,055\,03$.
3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif?
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

Partie C

On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité 0,8 et de spécificité 0,99.
Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de 29,44 %.
On choisit au hasard un individu de ce groupe; quelle est la probabilité qu'il ait été infecté ?

EXERCICE 4 — 5 POINTS

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.
Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. **Affirmation 1** : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
2. On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n,on a $u_n \leqslant \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n}$.
   Affirmation 2 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
3. On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

```
def terme(N) :
    U =1
    for i in range(N) :
        U = U+i
    return U
```

   Affirmation 3 : terme(4) renvoie la valeur 7.
4. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :
   - Prix A : il reçoit 1 000 euros par jour pendant 15 jours;
   - Prix B : il reçoit 1 euro le 1^er^ jour, 2 euros le 2^e^ jour, 4 euros le 3^e^ jour et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

   Affirmation 4 : La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$v_n = \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Affirmation 5 : La suite (v_n) est croissante.

Baccalauréat Asie 11 juin 2024

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5,5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :
$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$
4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.
Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.
Résoudre, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right) = u_n^2 - u_n\ln\left(u_n\right).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

2. Justifier que la suite (u_n) converge.
On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

3. Déterminer la valeur de ℓ.

EXERCICE 2 — 5,5 points

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.
De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

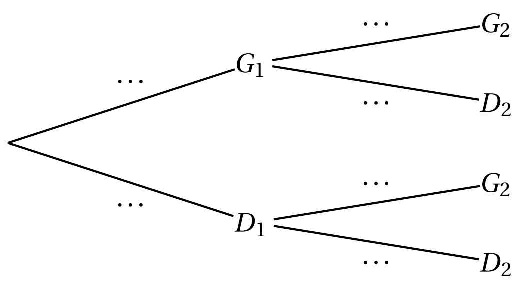
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $g_1 = 0,5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?

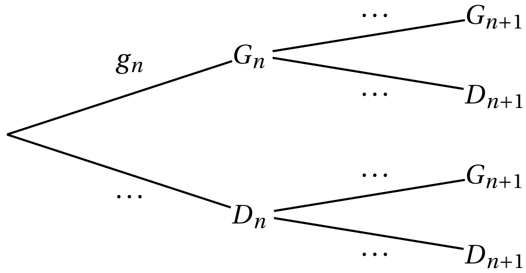
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2.

4. Soit n un entier naturel non nul.

a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.



b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2.$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0,4$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera son premier terme et sa raison.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n).

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n).
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$.

9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1  def seuil(e) :
2      g = 0.5
3      n = 1
4      while ... :
5          g = 0.5 * g + 0.2
6          n = ...
7      return (n)
```

EXERCICE 3 **4 points**

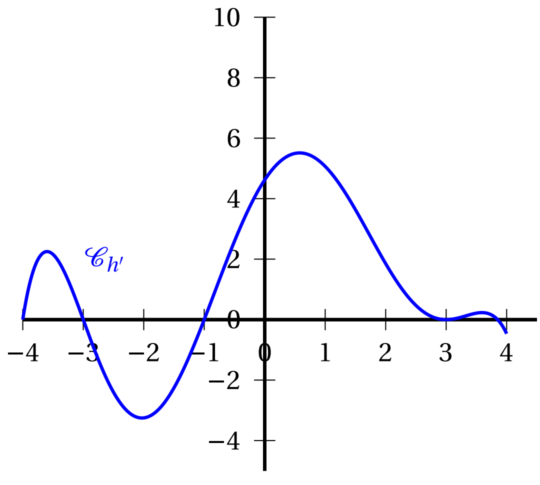
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant la relation suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \frac{1}{2} < u_n \leqslant \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}.$$

Affirmation 1 $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

2. Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [-4 ; 4].
La représentation graphique $\mathscr{C}_{h'}$ de sa fonction dérivée h' est donnée ci-dessous.



Affirmation 2 : La fonction h est convexe sur $[-1\,;\,3]$.

3. Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).

   Affirmation 3 : Il existe 20 634 codes qui contiennent au moins un 0.

4. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$.

   Affirmation 4 : La fonction f est une solution sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$xy' - y = x.$$

EXERCICE 4 — 5 points

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation :

$$(P) : \quad 2x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

On considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$\text{A}(1\,;\,0\,;\,1)\ ,\ \text{B}(2\,;\,-1\,;\,1)\ \text{et}\ \text{C}(-4\,;\,-6\,;\,5)\ .$$

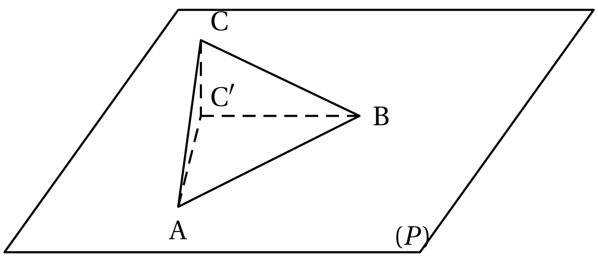
Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P).
2. Montrer que le point $\text{C}'(0\,;\,-2\,;\,-1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions

   $\left\{\begin{array}{l}\text{H} \in (\text{AB})\\ (\text{AB}) \text{ et } (\text{HC}) \text{ sont orthogonales.}\end{array}\right.$

   Déterminer les coordonnées du point H.



Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{HC}}$ sont : $\overrightarrow{\text{HC}}\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\-\frac{11}{2}\\4\end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\left\|\overrightarrow{\text{HC}}\right\|$.
2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

Partie C

On admet que $\text{HC}' = \sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha = \widehat{\text{CHC}'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.

2. **a.** Montrer que les droites $(\text{C}'\text{H})$ et (AB) sont perpendiculaires.

b. Calculer S' l'aire du triangle ABC', on donnera la valeur exacte.

c. Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.

∽ Baccalauréat Métropole 19 juin 2024 ∾

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **4points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x\,\mathrm{e}^{-x}$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Affirmation 1 :
L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f.

Affirmation 2 :
La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 5\,\mathrm{e}^{-x}$.

2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n), telles que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.

Affirmation 3 :
La suite (v_n) converge vers un nombre réel ℓ appartenant à l'intervalle $[-1\,;1]$.

On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.

Affirmation 4 :
Pour tout entier naturel n, on a alors : $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

EXERCICE 2 **5 points**

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.
Les achats sur internet représentent 60% des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30% des ventes et ceux en grandes surfaces 10% des ventes.
Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

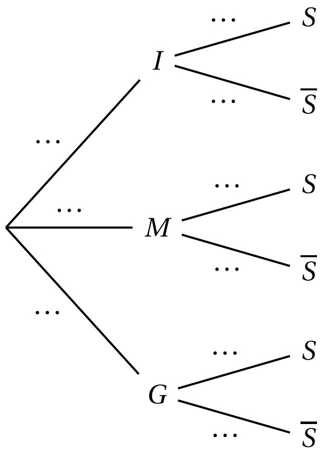
— 75% pour les clients sur internet ;
— 90% pour les clients en magasin d'électroménager ;
— 80% pour les clients en grande surface.

On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.

On définit les événements suivants :

— I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
— M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
— G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
— S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un événement quelconque, on notera $\overline{A}$ son événement contraire et $P(A)$ sa probabilité.



1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.
2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.
3. Démontrer que $P(S) = 0{,}8$.
4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.
5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.
7. Dans les deux questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.
   Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2.

   La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution.
   La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

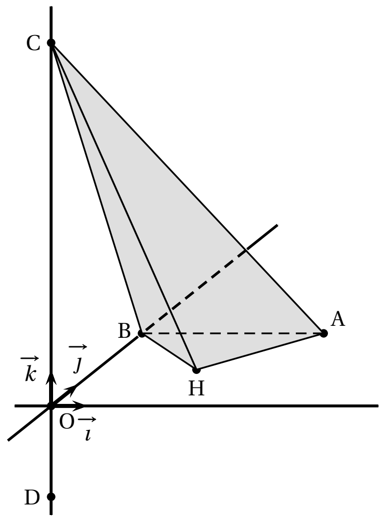
   On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :

   — L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;
   — L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

   a. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.

   b. Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\dfrac{2}{3}$.

EXERCICE 3 **5 points**



L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

On considère les points A(5 ; 5 ; 0), B(0 ; 5 ; 0), C(0 ; 0 ; 10) et $\mathrm{D}\left(0\,;\,0\,;\,-\dfrac{5}{2}\right)$.

1. **a.** Montrer que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

2. On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \dfrac{5}{2}t \\ y = 5 - \dfrac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

a. On admet que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,0\right)$.

b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

3. **a.** Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\dfrac{25}{4}$.

4. **a.** Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C.

b. En déduire le volume du tétraèdre ABCH.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$, *où* $\mathscr{B}$ *est l'aire d'une base et* h *la hauteur relative à cette base.*

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{2}\ln x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.

c. Étudier le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

d. Étudier la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\,;\,+\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1\,;\,2]$.

b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$.

c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g.

La fonction g est définie sur $]0\,;\,1]$ par : $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0\,;\,1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. **a.** Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

b. On admet le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	‖	$+$	0	$-$	

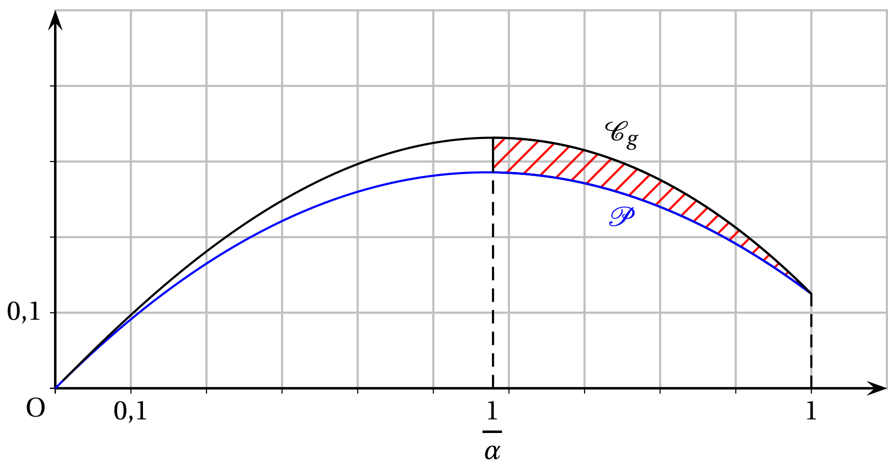
En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0\,;\,1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

— La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g ;

— La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.
On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

1. **a.** Justifier la position relative des courbes C_g et $\mathscr{P}$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.

b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathscr{A}$.

Baccalauréat Métropole 19 juin 2024 J1 (secours)

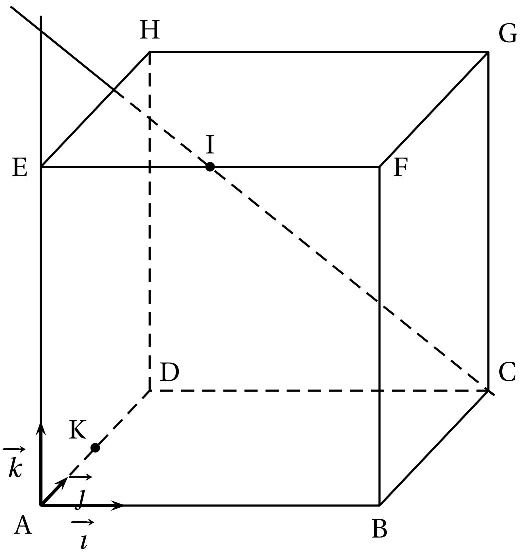
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

On considère un repère orthonormé $\left(A ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel on place les points

$$B(4;0;0), \quad D(0;4;0), \quad E(0;0;4)$$

et les points C, F, G et H de sorte que le solide ABCDEFGH soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.
2. On considère le point I milieu de l'arête [EF].
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 2+2t\\ y &=& 4t\\ z &=& 4-4t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de $\mathscr{P}$ avec (IC).

   a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donnée par :

$$x+2y-2z-4=0.$$

   b. Justifier que J a pour coordonnées $\left(\dfrac{28}{9} ; \dfrac{20}{9} ; \dfrac{16}{9}\right)$.
   Que représente J par rapport à C ?

   c. Vérifier que le point K(0 ; 2 ; 0) appartient au plan $\mathscr{P}$.

   d. Justifier que (BK) est l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABC).

4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{B \times h}{3}$, où B est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.

a. Déterminer le volume de la pyramide CBKG.

b. En déduire que l'aire du triangle BKG est égale à 12.

c. Justifier que la droite (BG) est incluse dans $\mathscr{P}$.

d. On note I$'$ un point de l'arête [EF], et P' le plan orthogonal à la droite (I$'$ C) passant par G.

Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans P' ?

EXERCICE 2 **4 points**

Partie A

Suite à une étude statistique réalisée dans la station-service Carbuplus, on évalue à 0,25 la probabilité qu'un client venant alimenter son véhicule en carburant passe moins de 12 minutes dans la station avant de la quitter.
On choisit au hasard et de façon indépendante 10 clients de la station et on assimile ce choix à un tirage avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 10 clients associe le nombre de ces clients ayant passé moins de 12 minutes à la station.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 4 clients dans un échantillon de 10 passent moins de 12 minutes à la station ? On arrondira si besoin le résultat à 10^{-3} près.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un client arrive à la station et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.
On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.
On suppose que T_1, T_2, T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.
On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer S en fonction de T_1, T_2 et T_3.
2. **a.** Déterminer l'espérance de S et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

   b. Quelle est la variance du temps d'attente total S de ce troisième client ?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

EXERCICE 3 **6 points**

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que pour tout nombre réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant 0$.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire la convergence de la suite (u_n).

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

5. **a.** Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leqslant h$, où h est un nombre réel strictement positif.

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
   n = 0
   u =7
   while ... :
      n = n+1
      u = ...
   return n
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit seuil(0.01) dans la console Python. Justifier la réponse.

Partie C : calcul intégral

1. Étudier le signe de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Interpréter graphiquement l'intégrale :

$$I = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\ ;\ 4]$, on a l'encadrement :

$$0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25.$$

En déduire l'encadrement :

$$1 \leqslant I \leqslant 2.$$

EXERCICE 4 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

a. Affirmation 1 :
La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

b. Affirmation 2 :
$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{f(x) - 5} = +\infty.$

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

a. Affirmation 3 :
Le point $\mathrm{A}\left(2\ ;\ \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.

b. Affirmation 4 :
Pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ 2[$, on a $g(x) \leqslant x$.

3. Affirmation 5 :
L'équation $x\ln(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Baccalauréat Métropole 20 juin 2024

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

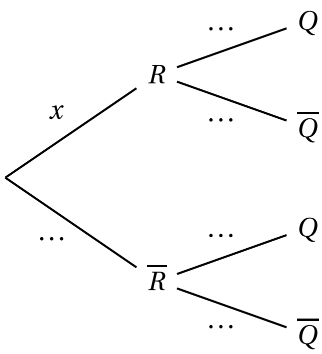
Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ».
Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.

On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».
Pour un évènement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire.
Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{Q}\right)$.
2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.
   a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
   b. Montrer que $x = 0,9$.



3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.
   Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?
4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).
   La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
   À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?
5. On interroge au hasard dix étudiants.
   Les variables aléatoires $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).
   Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \dots + N_{10}$.
   Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.

6. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.

a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?

b. Justifier que $E(M) = 12{,}3$ et $V(M) = 0{,}473\,55$.

c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.

« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

EXERCICE 2 — 5 points

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1m^3 = 1 000 L.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.
Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en mg. L^{-1}, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg.L^{-1}.
Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.
Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à 0,01 mg.L^{-1}.
Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de 0,70 mg. L^{-1}.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de 0,3 mg. L^{-1}.

2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en mg. L^{-1}, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0{,}7$.

On admet que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = 0{,}92 v_n + 0{,}3.$$

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse,

4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-contre écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```
def alerte_chlore(s) :
  n=0
  v=0.7
  while __________ :
      n= ______
      v= ______
  return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en mg. L^{-1}, dans la piscine.
On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle

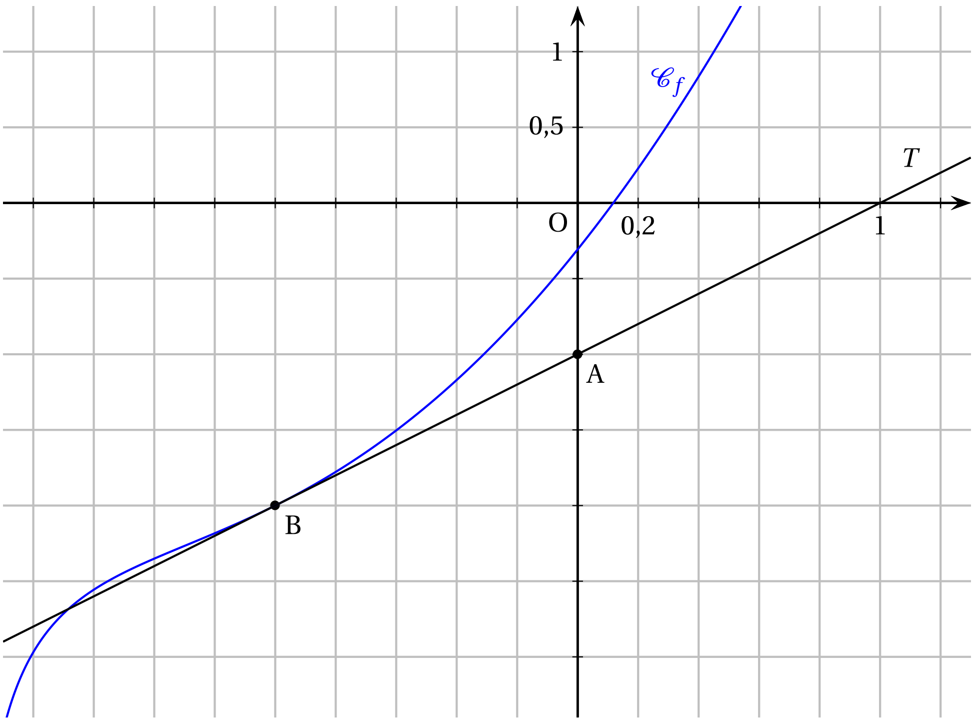
$$(E) : \quad y' = -0{,}08y + \frac{q}{50}$$

où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}$ où C est une constante réelle.
2. **a.** Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.
   b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à 0,7 mg.L^{-1}.
   On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de 2 mg.L^{-1}.
   Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

Exercice 3 **6 points**

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite T passe par le point A(0 ; -1).



Partie A : exploitation du graphique

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.

2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

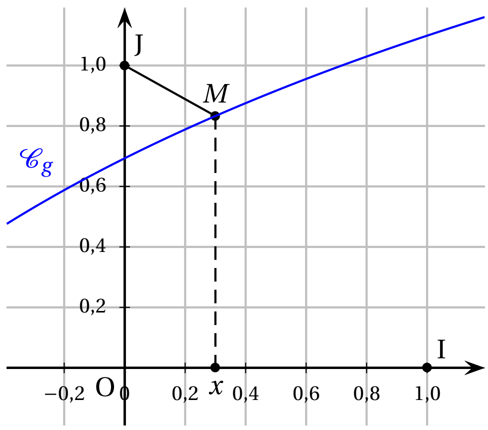
1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\ ;\ +\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\ ;\ +\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\ ;\ +\infty[$.
6. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale

Soit g la fonction définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x+2).$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, représentée ci- contre.
Soit M un point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \mathrm{J}M^2$.



1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.
2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\ ;\ +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.
   On admet également que pour tout réel $x > -2$,
   $$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$
   où f est la fonction étudiée en partie B.
   a. Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\ ;\ +\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.
   b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.

3. On notera M_a le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse α.

a. Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1-2\alpha-\alpha^2$.

b. En déduire que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_a et la droite $(\mathrm{J}M_\alpha)$ sont perpendiculaires.

On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

EXERCICE 4 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$\mathrm{A}(2\,;0\,;0),\quad \mathrm{B}(0\,;4\,;3),\quad \mathrm{C}(4\,;4\,;1),\quad \mathrm{D}(0\,;0\,;4)\quad \text{et}\quad \mathrm{H}(-1\,;\,I\,;\,2).$$

Affirmation 1 : les points A, C et D définissent un plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x-5y+4z-16=0$.

Affirmation 2 : les points A, B, C et D sont coplanaires.

Affirmation 3 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x-y+2z-2=0$.

Affirmation 4 : le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Baccalauréat Métropole 20 juin 2024 J2 (dévoilé)

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

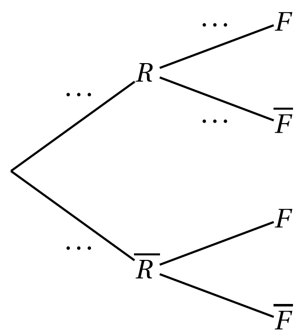
Partie A

Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans.
Elle constate que 60 % de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47 % ont acheté la carte de fidélité.
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.
On interroge au hasard un client et on considère les évènements suivants :

- R : « le client est un client régulier » ;
- F : « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un évènement E quelconque, on note $\overline{E}$ son évènement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

1. **a.** Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.



   b. Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.

   c. Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.

   d. Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers.

   Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.

2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise.

   On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0{,}38$.

   Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.

   a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.

   b. Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

Partie B

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.
On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1 000 clients.
On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000.
On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.
On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.
On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y}{1000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice.
Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,722 75.

3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

EXERCICE 2 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(0 ; 4 ; -1), \quad B(6 ; 1 ; 5) \quad \text{et} \quad C(6 ; -2 ; -1).$$

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+2t \\ y & = & 3-t \\ z & = & 1+2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 3 : Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et orthogonal à la droite(AB) est

$$2x+2y-z-9=0.$$

On considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$\mathscr{D} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 2+t \end{array}\right. \text{ où } t \in \mathbb{R}\,; \quad \mathscr{D}' \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t' \\ y & = & 4-t' \\ z & = & -1+2t' \end{array}\right. \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

EXERCICE 3 — 5 points

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a.

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$

1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - 2 = u_n\,(u_n - 2)$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)\,(u_n - 2)$.
2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.
   a. En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n < 2$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$

1. On donne ci-contre la fonction u écrite en langage Python.
   Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit `u(2,1)` et `u(2,2)` dans la console Python.

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n) :
      u=u**2-2*u+2
    return u
```

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$?
   On admettra ce résultat sans démonstration.

Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.

  a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a.

  b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)}$.

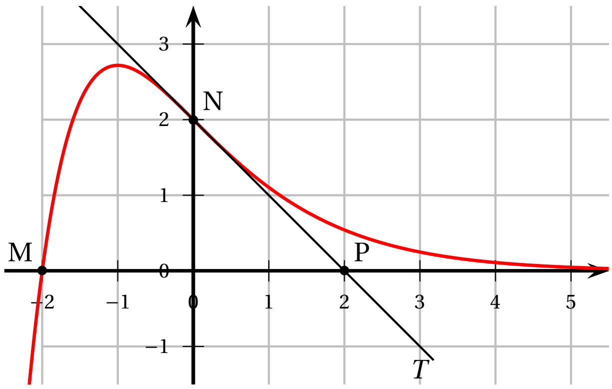
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 — 6 points

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.
Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point $\mathrm{N}(0 ; 2)$;
- le point $\mathrm{M}(-2 ; 0)$ appartenant à $\mathscr{C}_f$ et $\mathrm{P}(2 ; 0)$ appartenant à la tangente T.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty ; -1]$.



Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

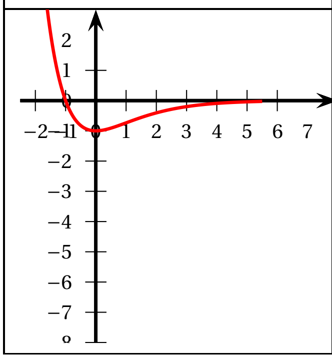
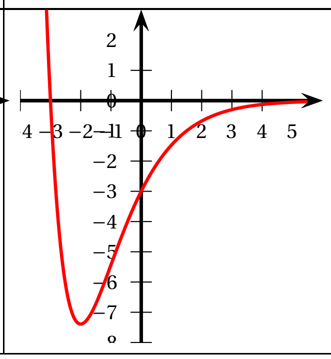
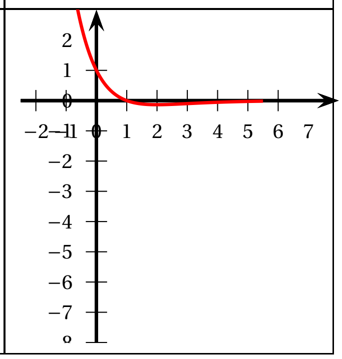
1. **a.** Donner $f(0)$.

  b. Déterminer $f'(0)$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.

4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3
		

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a,b et λ sont des constantes réelles.
Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.
3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On admet que $f'(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.
3. **a.** Étudier la convexité de f.
   b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
4. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, on pose :

$$I(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I(t) = (-t-3)\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2}.$$

   b. En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.

Baccalauréat Polynésie 19 juin 2024

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée

Exercice 1 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

Les quatre affirmations se placent dans la situation suivante :
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$\text{A}(2 ; 1 ; -1), \quad \text{B}(-1 ; 2 ; 1) \text{ et } \quad \text{C}(5 ; 0 ; -3).$$

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x + 5y - 2z + 3 = 0.$$

On note $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& -t+3\\ y &=& t+2\\ z &=& 2t+1\end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 1 :
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (OAC).

Affirmation 2 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont sécantes au point C.

Affirmation 3 :
La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 :
Le plan médiateur du segment [BC], noté Q, a pour équation cartésienne :

$$3x - y - 2z - 7 = 0.$$

On rappelle que le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

Exercice 2 — 5 points

Une entreprise fabrique des objets en plastique en injectant dans un moule de la matière fondue à 210 °C. On cherche à modéliser le refroidissement du matériau à l'aide d'une fonction f donnant la température du matériau injecté en fonction du temps t.
Le temps est exprimé en seconde et la température est exprimée en degré Celsius.
On admet que la fonction f cherchée est solution d'une équation différentielle de la forme suivante où m est une constante réelle que l'on cherche à déterminer :

$$(E): \quad y' + 0{,}02y = m$$

Partie A

1. Justifier l'affichage suivant d'un logiciel de calcul formel :

Entrée :	RésoudreEquationDifférentielle $(y' + 0{,}02y = m)$
Sortie :	$\boxed{\rightarrow}$ $y = k * \exp(-0.02 * t) + 50 * m$

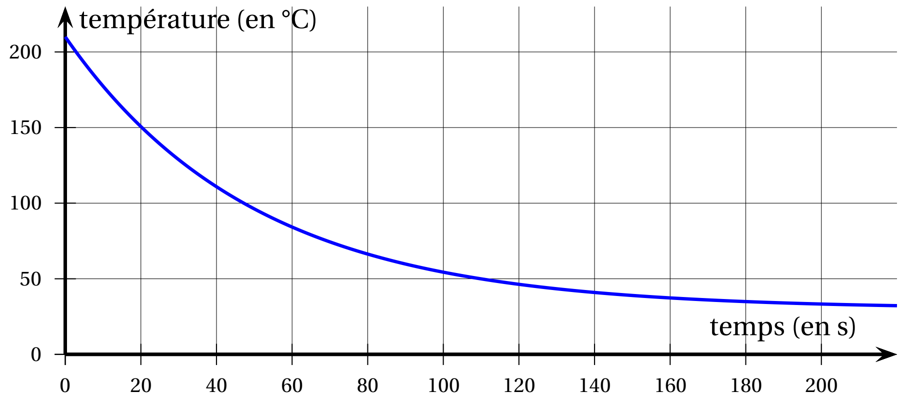
2. La température de l'atelier est de 30 °C. On admet que la température $f(t)$ tend vers 30 °C lorsque t tend vers l'infini.
Démontrer que $m = 0{,}6$.

3. Déterminer l'expression de la fonction f cherchée en tenant compte de la condition initiale $f(0) = 210$.

Partie B

On admet ici que la température (exprimée en degré Celsius) du matériau injecté en fonction du temps (exprimé en seconde) est donnée par la fonction dont l'expression et une représentation graphique sont données ci-dessous :

$$f(t) = 180\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30.$$



1. L'objet peut être démoulé lorsque sa température devient inférieure à 50°C.

a. Par lecture graphique, donner une valeur approchée du nombre T de secondes à attendre avant de démouler l'objet.

b. Déterminer par le calcul la valeur exacte de ce temps T.

2. À l'aide d'une intégrale, calculer la valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes.

Exercice 3 — 5 points

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles

Partie A

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face ».

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
2. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$				

Partie B

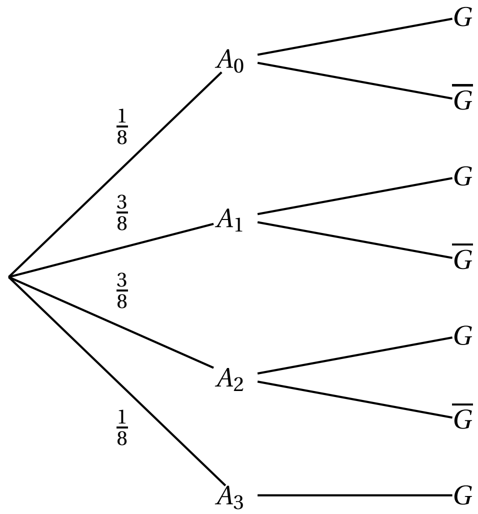
Voici les règles d'un jeu où le but est d'obtenir trois pièces du côté « Face » en un ou deux essais :

- On lance trois pièces équilibrées :
  - Si les trois pièces sont tombées du côté « Face », la partie est gagnée ;
  - Sinon, les pièces tombées du côté « Face » sont conservées et on relance celles tombées du côté « Pile ».
- La partie est gagnée si on obtient trois pièces du côté « Face », sinon elle est perdue.

On considère les évènements suivants :

- G : « la partie est gagnée ».
  Et pour tout entier k compris entre 0 et 3, les évènements :
- A_k : « k pièces sont tombées du côté « Face » au premier lancer ».

1. Démontrer que $P_{A_1}(G) = \dfrac{1}{4}$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. Démontrer que la probabilité p de gagner à ce jeu est $p = \dfrac{27}{64}$
4. La partie a été gagnée. Quelle est la probabilité qu'exactement une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative ?
5. Combien de fois faut-il jouer à ce jeu pour que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,95 ?

Exercice 4 — 6 points

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.
Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n) :
        ...
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie 1.3333333333333333.
   Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.
3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

3. **a.** Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
   Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$$

   b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
   Déterminer sa limite.
5. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$?

∽ Baccalauréat Polynésie 21 juin 2024 ∾

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 **4 points**

Un sondage réalisé en France fournit les informations suivantes :

- 60 % des plus de 15 ans ont l'intention de regarder les Jeux olympiques et paralympiques (JOP) de Paris 2024 à la télévision;
- parmi ceux qui ont l'intention de regarder les JOP, 8 personnes sur 9 déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

On choisit au hasard une personne de plus de 15 ans. On considère les évènements suivants :

- J : « la personne a l'intention de regarder les JOP Paris 2024 à la télévision »;
- S : « la personne choisie déclare pratiquer une activité sportive régulière ».

On note $\overline{J}$ et $\overline{S}$ leurs évènements contraires.

Dans les questions 1. *et* 2.*, les probabilités seront données sous la forme d'une fraction irréductible.*

1. Démontrer que la probabilité que la personne choisie ait l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est de $\dfrac{8}{15}$.

On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

Selon ce sondage, deux personnes sur trois parmi les plus de 15 ans déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

2. **a.** Calculer la probabilité que la personne choisie n'ait pas l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière.

b. En déduire la probabilité de S sachant $\overline{J}$ notée $P_{\overline{J}}(S)$.

Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

3. Dans le cadre d'une opération de promotion, 30 personnes de plus de 15 ans sont choisies au hasard.

On assimile ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.

a. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

b. Calculer la probabilité qu'exactement 16 personnes déclarent pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.

c. La fédération française de judo souhaite offrir une place pour la finale de l'épreuve par équipe mixte de judo à l'Arena Champ-de-Mars pour chaque personne déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi ces 30 personnes.

Le prix d'une place s'élève à 380 € et on dispose d'un budget de 10 000 euros pour cette opération.

Quelle est la probabilité que ce budget soit insuffisant ?

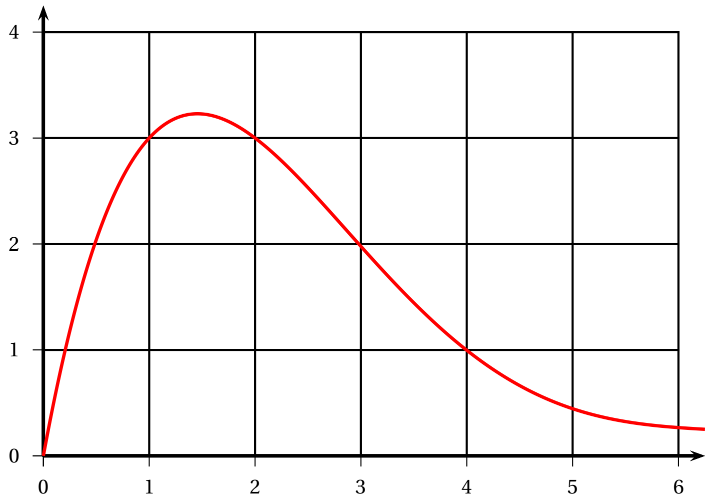
Exercice 2 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend cinq questions. Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chacune des questions, ***une seule des quatre réponses est exacte****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

1. La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   A. $f(x) = \text{e}^{-3x}$ **B.** $f(x) = -\dfrac{4}{3}\text{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$
   C. $f(x) = \text{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$ **D.** $f(x) = -\dfrac{10}{3}\text{e}^{-3x} - \dfrac{7}{3}$

2. La courbe d'une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ est donnée ci-dessous.



   Un encadrement de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^5 f(x)\,\text{d}x$ est :

   A. $0 \leqslant I \leqslant 4$ **B.** $1 \leqslant I \leqslant 5$
   C. $5 \leqslant I \leqslant 10$ **D.** $10 \leqslant I \leqslant 15$

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 \ln\left(x^2 + 4\right)$.
   Alors $\displaystyle\int_0^2 g'(x)\,\text{d}x$ vaut, à 10^{-1} près :

   A. 4,9 **B.** 8,3
   C. 1,7 **D.** 7,5

4. Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale.
   Elle veut former un groupe de 5 élèves. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves ?

A. 31^5 **B.** $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$

C. $31+30+29+28+27$ **D.** $\dbinom{31}{5}$

5. La professeure s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :

— 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ;
— 20 élèves ont choisi la spécialité SES ;
— 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

A. $\dbinom{20}{3} \times \dbinom{11}{2}$ **B.** $\dbinom{20}{3} + \dbinom{11}{2}$

C. $\dbinom{20}{3}$ **D.** $20^3 \times 11^2$

Exercice 3 6 points

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\ u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. a. Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2.

b. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

```
def mystere(k) :
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k) :
        S = S + u
        u = u – log( u / 4 )
    return S
```

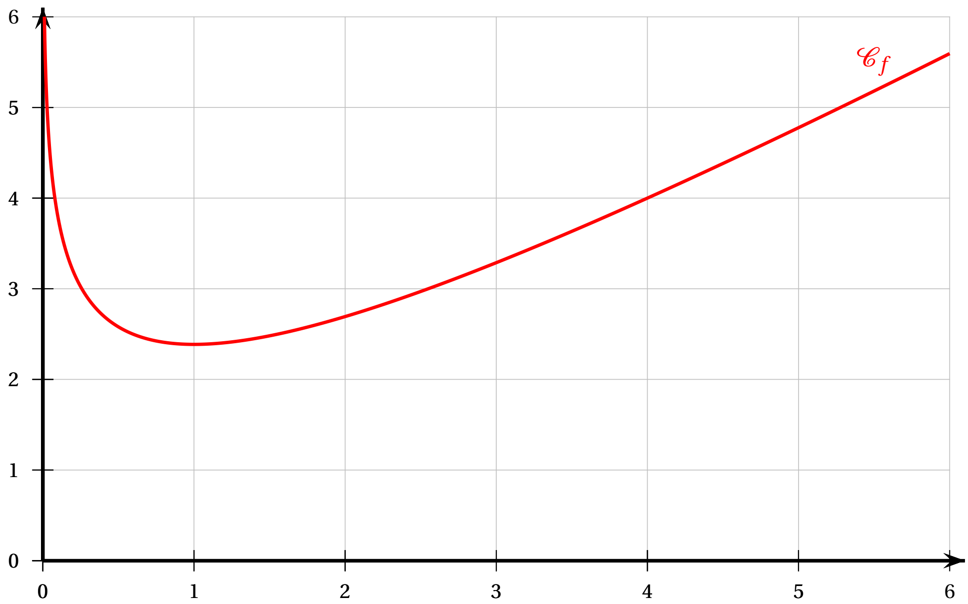
L'exécution de `mystere(10)` renvoie `58.44045206721732`. Que représente ce résultat ?

c. Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6.



Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
On précisera la valeur exacte du minimum de f *sur* $[0\ ;\ +\infty[$*. Les limites ne sont pas demandées.*

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle.
On note ℓ la valeur de cette limite

c. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

d. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 4 — 5 points

Une commune décide de remplacer le traditionnel feu d'artifice du 14 juillet par un spectacle de drones lumineux.

Pour le pilotage des drones, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ dont l'unité est la centaine de mètres.

La position de chaque drone est modélisée par un point et chaque drone est envoyé d'un point de départ D de coordonnées $(2\ ;\ 5\ ;\ 1)$.

On souhaite former avec des drones des figures en les positionnant dans un même plan $\mathscr{P}$.

Trois drones sont positionnés aux points $\mathrm{A}(-1\ ;\ -1\ ;\ 17)$, $\mathrm{B}(4\ ;\ -2\ ;\ 4)$ et $\mathrm{C}(1\ ;\ -3\ ;\ 7)$.

1. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Dans la suite, on note $\mathscr{P}$ le plan (ABC) et on considère le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

2. a. Justifier que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC).

b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $2x - 3y + z - 18 = 0$.

3. Le pilote des drones décide d'envoyer un quatrième drone en prenant comme trajectoire la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par

$$d : \left\{\begin{array}{l c r} x & = & 3t+2 \\ y & = & t+5 \\ z & = & 4t+1 \end{array}\right. \text{, avec } t \in \mathbb{R}.$$

a. Déterminer un vecteur directeur de la droite d.

b. Afin que ce nouveau drone soit également placé dans le plan $\mathscr{P}$, déterminer par le calcul les coordonnées du point E, intersection de la droite d avec le plan $\mathscr{P}$.

4. Le pilote des drones décide d'envoyer un cinquième drone le long de la droite Δ qui passe par le point D et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Ce cinquième drone est placé lui aussi dans le plan $\mathscr{P}$, soit à l'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$. On admet que le point F$(6\,;\,-1\,;\,3)$ correspond à cet emplacement.

Démontrer que la distance entre le point de départ D et le plan $\mathscr{P}$ vaut $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.

5. L'organisatrice du spectacle demande au pilote d'envoyer un nouveau drone dans le plan (peu importe sa position dans le plan), toujours à partir du point D.

Sachant qu'il reste 40 secondes avant le début du spectacle et que le drone vole en trajectoire rectiligne à 18,6 m.s^{-1}, le nouveau drone peut-il arriver à temps ?

Index