

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Sportifs de haut-niveau ∞
septembre 1990

EXERCICE 1

points

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0, \\ u_1 &= 1 \text{ et} \\ u_{n+1} &= 7u_n + 8u_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire s_n en fonction de n .
2. On pose $v_n = (-1)^n u_n$ et on considère la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$t_n = v_{n+1} - v_n.$$

Exprimer t_n en fonction de s_n .

3. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n (on pourra calculer, de deux manières, la somme $t_0 + \dots + t_{n-1}$).
Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{8^n}$.

EXERCICE 2

points

n désigne un entier strictement positif fixé.

On se propose de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\pi |\sin(nt)| dt.$$

Pour ceci on commence par étudier le signe de $\sin(nt)$ sur l'intervalle $[0; \pi]$

1. Soit un entier $k \geq 0$ et soit l'intervalle $J_k = [k\frac{\pi}{n}; (k+1)\frac{\pi}{n}]$:
 - a. t désignant un élément de J_k , donner un encadrement du réel nt .
 - b. En déduire que $\sin(nt)$ garde un signe constant lorsque t décrit J_k .
Préciser ce signe lorsque $k = 2\ell$ ($\ell \in \mathbb{N}$), puis lorsque $k = 2\ell + 1$ ($\ell \in \mathbb{N}$).
 - c. Calculer $\int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} |\sin(nt)| dt$.
2. Calculer l'intégrale $I = \int_0^\pi |\sin(nt)| dt$.
(On pourra utiliser 1. c. et la relation de Chasles sur les intégrales.)

PROBLÈME**points**

Le plan est rapporté à un repère direct $\mathcal{R} = (\text{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

On note x et y les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par :

$$x(t) = e^t \cos t \quad \text{et} \quad y(t) = e^t \sin t.$$

Pour tout réel t , on note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t); y(t))$ et on note $\overrightarrow{v(t)}$ le vecteur de composantes $(x'(t); y'(t))$.

L'objectif du problème est l'étude de quelques propriétés géométriques de la courbe Γ décrite par le point $M(t)$.

1. Étude de la tangente en un point

- a. Étant donné un réel t , montrer que $\overrightarrow{OM(t)}$ est différent de O , et calculer les affixes $Z(t)$ et $W(t)$ des vecteurs $\overrightarrow{OM(t)}$ et $\overrightarrow{v(t)}$ respectivement.

Montrer que le nombre complexe $U = \frac{W(t)}{Z(t)}$ est indépendant de t .

Déterminer le module et un argument de U .

- b. Étant donné un réel t , on note $B(t)$ le point défini par $\overrightarrow{M(t)B(t)} = \overrightarrow{v(t)}$.

- c. Dédurre de ce qui précède une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM(t)}, \overrightarrow{M(t)B(t)})$.

Montrer que la tangente en $M(t)$ à Γ est l'image de la droite $(\text{O}M(t))$ par la rotation de centre $M(t)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2. Intersection de Γ avec les cercles de centre O , et construction point par point

- a. Pour tout réel t , calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$.

- b. Étant donné un réel $R > 0$, montrer que Γ a un unique point d'intersection avec le cercle \mathcal{C}_R de centre O et de rayon R et calculer, en fonction de R , les coordonnées de ce point d'intersection.

- c. Calculer, avec deux décimales exactes, les coordonnées des points d'intersection de Γ avec les cercles \mathcal{C}_R lorsque R prend les quinze valeurs suivantes :

0,05; 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5.

Construire ces points sur une figure en prenant l'unité de longueur égale à 2 cm.

Sur cette même figure, construire les tangentes à Γ en les cinq points correspondant à $R = 1; 2; 3; 4; 5$. Acheter, sans justification, la construction de Γ .

3. Similitudes directes de centre O qui conservent Γ

- a. Soit s une similitude directe de centre O d'angle θ et de rapport λ .

On suppose que $s(M(0))$ appartient à Γ , et on écrit $s(M(0)) = M(t)$ ($t \in \mathbb{R}$).

Montrer que $\lambda = e^t$ et $e^{i\theta} = e^{it}$.

En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $\lambda = e^{\theta+2k\pi}$.

- b. Étant donné un réel θ et un entier relatif k , on note $S_{\theta, k}$ la similitude directe de centre O , d'angle θ et de rapport $e^{\theta+2k\pi}$.

i. Donner l'écriture complexe de $S_{\theta, k}$.

-
- ii. Montrer que, pour tout réel t , il existe un réel t' qu'on précisera, tel que $S_{\theta, k}(M(t)) = M(t')$.
 - iii. Quelle est l'image de Γ par $S_{\theta, k}$?
 - c. Déterminer toutes les similitudes directes de centre O qui conservent Γ .
 - d. Déterminer les rapports de toutes les homothéties de centre O qui conservent Γ .