Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Sport-études septembre 1982 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et

— si $x < 0$ alors $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

— si $x > 0$ alors $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{x-1}{x^2}}$.

1. La fonction f est-elle continue en 0 ? La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. **a.** Rappeler le résultat de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

   b. Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe représentative, $\mathscr{C}$ de la fonction f.

   Tracer $\mathscr{C}$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel, n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 5.
2. Trouver tous les entiers naturels, n, tels que

$$3^n \equiv n \quad [5].$$

PROBLÈME **12 points**

Dans tout le problème, des figures simples pourront suggérer les démonstrations demandées.

Partie A

1. $\mathscr{E}_2$ est un plan vectoriel euclidien orienté et $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ une base orthonormée directe de $\mathscr{E}_2$.

   a. $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont les droites vectorielles de bases respectives :

$$\overrightarrow{u_1} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_2} = \vec{\jmath}.$$

   Soit s_1 et s_2 les symétries vectorielles orthogonales par rapport, respectivement, à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

   Déterminer l'application composée $r = s_2 \circ s_1$.

b. $\mathcal{D}_3$ est la droite vectorielle de base $\overrightarrow{u_3} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ et s_3 la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\mathcal{D}_3$. Montrer que s_3 a pour matrice, dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$,

$$\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}.$$

c. Démontrer l'existence d'une symétrie vectorielle orthogonale unique, s_4 telle que

$$s_4 \circ s_3 = s_2 \circ s_1.$$

Donner une base de son axe $\mathcal{D}_4$. Quel est l'angle des droites vectorielles $(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4)$?

2. E_2 est un plan affine euclidien associé à $\mathcal{E}_2$ et $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé direct de E_2.

Soit $A(5 ; 0)$, $B(4 ; 1)$, $A'(-3 ; 2)$, $B'(-4 ; 1)$ quatre points de E_2.

a. Montrer qu'il existe un déplacement, f, de E_2, et un seul, tel que

$$f(A) = A' \quad \text{et} \quad f(B) = B'.$$

Donner sa nature et ses éléments fondamentaux.

b. m est le point de coordonnées $(0 ; -3)$ et D la droite ωA, s_D est la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine D. Montrer qu'il existe une droite D$'$, et une seule, telle que

$$f = s_{D'} \circ s_D.$$

Faire une figure.

c. R est la rotation de centre A et dont l'angle a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et T la translation affine de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Montrer que

$$f = T \circ R.$$

Soit $B_1 = R(B)$. Quelle est la nature du quadrilatère $AA'B'B_1$?

d. g est l'antidéplacement tel que $g(A) = A'$ et l'endomorphisme associé est s_1 de $\mathcal{E}_2$ (défini au 1. a.)

Montrer que g est la composée commutative d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ et d'une translation de vecteur $\vec{v}$ appartenant à la direction de Δ. Préciser Δ et $\vec{v}$ et vérifier que le milieu I de (A, A') est sur Δ.

e. Montrer que les cinq points O, I, A, B, ω sont cocycliques.

Partie B

$\mathcal{E}_3$ est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, rapporté à la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormée directe.

1. σ_1 et σ_2 sont les symétries vectorielles orthogonales par rapport aux droites vectorielles de bases respectives

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{k}.$$

Montrer que l'application $\sigma_3 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ est une rotation vectorielle dont on précisera l'axe et l'angle.

2. σ_4 est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle de base $\overrightarrow{\jmath}$. Caractériser $\rho = \sigma_4 \circ \sigma_3$ pour cela on étudiera la restriction de ρ au plan vectoriel de base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ supposé orienté à l'aide du vecteur $\overrightarrow{k}$.

3. E_3 est un espace affine euclidien associé à $\mathcal{E}_3$ et $\left(O\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé direct de E_3. C et C′ sont les points de coordonnées respectives : $(5\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $(-3\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

a. R' est l'application affine associée à ρ, telle que $R'(C) = C'$. Montrer que R' est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle ; pour cela on étudiera la restriction de R' au plan d'équation $z = 1$.

b. T' est la translation affine de vecteur $6\overrightarrow{k}$. Soit $F' = T' \circ R'$. Donner la nature de F', ses éléments caractéristiques, ainsi que l'ensemble des points invariants par F'.

L est la droite de E_3 d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcr} y & = & -3 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

S_L est la symétrie orthogonale par rapport à la droite L.

Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale par rapport à une droite L′, à déterminer, telle que

$$F' = S_{L'} \circ S_L.$$