

Durée : 4 heures

œ Baccalauréat C Strasbourg juin 1969 œ

EXERCICE 1

Résoudre en nombres entiers  $(x, y)$  l'équation

$$x^2 - y^2 = 1969.$$

EXERCICE 2

Dans un repère orthonormé on considère la courbe  $(\mathcal{L})$  d'équation  $y = \text{Log } x$  et la courbe  $(\mathcal{L}')$  d'équation  $y = \text{Log } 3x$ .

1. Par quelle transformation géométrique peut-on déduire  $(\mathcal{L}')$  de  $(\mathcal{L})$ ?
2. On donne deux nombres réels,  $h$  et  $x_0$ ; on suppose  $h$  positif ( $h > 0$ ) et  $x_0$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

Les droites d'équations  $x = x_0$  et  $x = x_0 + h$  coupent  $(\mathcal{L})$  [respectivement  $(\mathcal{L}')$ ] en A et B (respectivement A' et B').

Évaluer l'aire du domaine limité par le contour  $ABB'A'A$ .

La formule obtenue est-elle encore valable lorsque  $x_0$  est choisi dans l'intervalle  $]0; +1[$ ?

PROBLÈME

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , dont les axes sont notés  $x'Ox$  et  $y'Oy$ . Deux points, P et Q, appartiennent respectivement aux droites  $x'Ox$  et  $y'Oy$  de façon que la distance PQ soit égale à l'unité de longueur; on pose

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{PQ}) = \theta \pmod{2\pi}.$$

PREMIÈRE PARTIE - Dans cette partie,  $\theta$  est donné.<sup>1</sup>

1. Construire les deux points P et Q. En déduire les dispositions relatives des points P, Q (associés à  $\theta$ ) et P', Q' (associés à  $\theta'$ ) dans chacune des hypothèses suivantes :

$$\theta + \theta' = 0; \quad \theta + \theta' = \pi; \quad \theta - \theta' = \pi.$$

2. a. Donner, en fonction de  $\theta$ , les coordonnées des points P et Q.

---

1. Le sujet remis aux candidats comportant des erreurs, la composition a été refaite. Le texte que nous publions ici est le texte rectifié, c'est-à-dire le texte sans les erreurs. (Note du Service des Annales.)

- b. On appelle R le point du plan déterminé ainsi : le triangle PQR est rectangle en R et isocèle et

$$\left(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR}\right) = +\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}.$$

Soit  $p, q, r$  les nombres complexes affixes des points P, Q, R dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
Exprimer  $r$  en fonction de  $p$  et  $q$  et en déduire les coordonnées de R en fonction de  $\theta$ .

3. a. Soit M le barycentre du système formé des trois points P, Q, R affectés respectivement des coefficients réels  $\alpha, \beta, 2\gamma$  ( $\alpha + \beta + 2\gamma \neq 0$ ).  
Vérifier que le point M a pour coordonnées

$$x = \frac{1}{\alpha + \beta + 2\gamma} [y \sin \theta - (\alpha + \gamma) \cos \theta]$$

$$\text{et } y = \frac{1}{\alpha + \beta + 2\gamma} [(\beta + \gamma) \sin \theta - \gamma \cos \theta].$$

- b. On choisit  $\alpha = \beta = 1$  et  $\gamma = 0$  : préciser la position,  $M_0$ , du barycentre.  
c. Comment doit-on choisir  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  pour que M appartienne à la droite PQ (hypothèse n° 1); pour que M appartienne à la droite  $RM_0$  (hypothèse n° 2)?

**DEUXIÈME PARTIE** - Dans cette partie,  $\theta$  décrit l'intervalle  $] -\pi ; +\pi ]$ .

- Déterminer l'ensemble des points  $M_0$ .
- Démontrer que,  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  étant choisis conformément à l'hypothèse n° 1, l'ensemble des points  $M$  est en général une ellipse, dont on précisera l'axe focal; examiner les cas singuliers.
- $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont choisis conformément à l'hypothèse n° 2 et l'on pose

$$k = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}.$$

- a. Préciser les ensembles,  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_{-1}$  des points  $M$  obtenus respectivement pour  $k = 1$  et  $k = -1$ .  
b. On suppose  $k^2 - 1 \neq 0$ .  
Etablir que, pour une valeur donnée de  $k$ , l'ensemble,  $\mathcal{E}_k$  des points  $M$  a pour équation

$$(x - ky)^2 + (kx - y)^2 = \frac{(k^2 - 1)^2}{4}.$$

Écrire l'équation de  $\mathcal{E}_k$  dans le repère  $(O, \vec{i}', \vec{j}')$  déduit de  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , par la rotation de centre O et d'angle  $+\frac{\pi}{4}$ ; reconnaître alors l'ensemble  $\mathcal{E}_k$ .

**DEUXIÈME COMPOSITION<sup>2</sup>****EXERCICE 1**

On définit la fonction  $f$  de la variable réelle  $y$  de la façon suivante :

$$x = f(y) = y^2 + y - 1, \quad \text{avec } 0 \leq y \leq 5.$$

Quelle propriété du programme peut-on invoquer pour justifier l'existence d'une fonction  $\varphi$  telle que

$$x = f(y) \iff y = \varphi(x), \quad \text{avec } -1 \leq x \leq 29?$$

Calculer effectivement  $y$  en fonction de  $x$ , en donnant l'expression algébrique de  $\varphi(x)$ .  
Calculer la dérivée  $y' = \varphi'(x)$ .

**EXERCICE 2**

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres complexes, distincts ou non, donnés; on considère l'équation

$$(E) \quad z^2 - (b+1)z + a = 0,$$

où  $z$  est une inconnue complexe.

1. À quelle condition concernant  $a$  et  $b$  l'équation (E) a-t-elle deux racines distinctes?
2. Résoudre (E) dans le cas particulier où  $a = i - 1$  et  $b = 2i$ .

**EXERCICE 3**

On donne, dans un plan (P), un repère orthonormé  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ . Soit  $m$  un point variable de (P); on appelle  $x$  et  $y$  respectivement l'abscisse et l'ordonnée de  $m$ . Soit  $M$  un point de (P), dont l'abscisse,  $X$ , et l'ordonnée,  $Y$ , sont définies en fonction des coordonnées de  $m$  par les relations

$$X = \frac{1}{y} \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{x}$$

On appelle  $T$  la transformation ponctuelle qui transforme  $m$  en  $M$ .

**Partie A**

1. Trouver l'ensemble,  $(P_1)$ , des points  $m$  de (P) qui ont un transformé,  $M$ , par  $T$ .
2. Démontrer que  $T$  est une application bijective et involutive de  $(P_1)$  sur lui-même.
3. Démontrer que  $O$ ,  $m$  et  $M$  sont alignés.
4. Trouver l'ensemble des points invariants par  $T$ .

---

2. Sujet donné aux candidats

**Partie B**

On donne, dans  $(P)$ , une droite  $(D)$ , d'équation  $ax + by + c = 0$ ; on pose

$$(D_1) = (D) \cap (P_1)$$

Soit  $(D'_1)$  la transformée de  $(D_1)$  par  $T$ .

1. Former l'équation de  $(D'_1)$ .
2. On suppose que  $abc = 0$ .  
Montrer que  $(D_1)$  est une droite privée d'un point.  
Comparer  $(D'_1)$  à  $(D_1)$ .
3. On suppose que  $abc \neq 0$ .  
Montrer que  $(D_1)$  est une hyperbole privée d'un point. Préciser les asymptotes de l'hyperbole et calculer sa distance focale en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

**Partie C**

À tout point  $m$  de  $(P_1)$  on associe à présent le point  $M'$ , d'abscisse  $X'$  et d'ordonnée  $Y'$ , telles que

$$X' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad Y' = \frac{1}{y}.$$

Soit  $T'$  la transformation ponctuelle qui transforme  $m$  en  $M'$ .

1. Trouver les points invariants par  $T'$ .
2. Montrer que  $T'$  est le produit (ou la composée), dans un ordre quelconque de  $T$  et d'une transformation ponctuelle simple,  $S$ , que l'on précisera. Utiliser cette propriété, ainsi que certains résultats établis dans les parties A ou B, pour traiter géométriquement (c'est-à-dire sans calcul) les deux questions suivantes.
3. Montrer que  $T'$  est une application bijective et involutive de  $(P_1)$  sur lui-même.
4. Déterminer les droites dont la partie contenue dans  $(P_1)$  est invariante par  $T'$ .