

♣ Baccalauréat C Strasbourg juin 1971 ♣

EXERCICE 1

Soit le plan rapporté à un repère orthonormé, les axes de coordonnées étant désignés par $x'Ox$ et $y'Oy$. On appelle (Δ) la droite d'équation $x = 6$, H la projection orthogonale du point M sur la droite (Δ) .

1. Soit l'ellipse (E) de foyer O de directrice (Δ) , ensemble des points M du plan tels que

$$(1) \quad 2OM = MH.$$

Former son équation cartésienne.

2. Un axe $t'Ot$ du plan, repéré par son angle polaire $(\vec{Ox}, \vec{Ot}) = \theta$ (modulo 2π), coupe la droite (Δ) en P et la courbe (E) en deux points M et M' dont les abscisses sur l'axe Ot sont OM et OM' .

On choisit $\overline{OM} > 0 > \overline{OM'}$ et l'on sait que

$$\vec{OM} + \vec{MH} = \vec{OH};$$

en utilisant une projection sur l'axe $x'Ox$ et la relation (1), calculer \overline{OM} en fonction de θ .

Sans nouveaux calculs, démontrer que

$$\overline{OM'} = \frac{-6}{2 - \cos \theta}.$$

3. Démontrer que

$$\frac{1}{\overline{OM}} + \frac{1}{\overline{OM'}} = \frac{2}{\overline{OP}},$$

Que peut-on en conclure?

EXERCICE 2

On définit la suite de terme général v_n de la façon suivante :

$$\begin{cases} v_0 & = & 1, \\ v_{n+1} & = & \sqrt{12 + v_n}, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , v_n est un nombre réel strictement positif et strictement inférieur à 4.
2. On pose $4 - v_n = w_n$. Démontrer que

$$w_{n+1} < \frac{1}{4} w_n;$$

en déduire la limite de w_n , puis celle de v_n lorsque n tend vers l'infini.

N. B. - On attachera une importance particulière à la clarté de la rédaction du raisonnement par récurrence.

PROBLÈME

Dans tout le problème, x désigne un nombre réel strictement positif et $\text{Log } x$ le logarithme népérien de x (on rappelle que $\text{Log } e = 1$).

À tout nombre réel k on associe l'application de l'ensemble des nombres réels strictement positifs dans l'ensemble des nombres réels, définie par

$$f_k(x) = \frac{\text{Log } x}{x} - \frac{k}{x}.$$

On appelle (C_k) la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormé, les axes de coordonnées étant désignés par $x'Ox$ et $y'Oy$.

1.
 - a. Étudier les variations de f_1 et tracer la courbe (C_1) , correspondant à $k = 1$.
 - b. Étudier les variations de f_k ; déterminer la limite de $f_k(x)$ lorsque x tend vers zéro par valeurs positives et la limite de $f_k(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$.
L'application f_k est-elle injective; est-elle surjective?
2.
 - a. On appelle T_k le point de contact de (C_k) et de la tangente à (C_k) issue de O . Calculer, en fonction de k , l'abscisse t_k de T_k ?
Quel est l'ensemble des points T_k lorsque k varie dans l'ensemble des nombres réels?
 - b. On appelle P_k le point de (C_k) d'ordonnée nulle, M_k le point de (C_k) où la tangente à (C_k) est parallèle à $x'Ox$ et I_k le point de (C_k) dont l'abscisse annule la dérivée seconde de f_k . Calculer, en fonction de k , les abscisses respectives p_k, m_k et i_k de P_k, M_k et I_k .
Montrer que p_k, m_k, i_k sont les quatre premiers termes d'une suite géométrique; on notera $u_n(k)$ le terme de rang $(n + 1)$ de cette suite.
 - c. Calculer la somme des n premiers termes de cette suite géométrique. Cette somme a-t-elle une limite lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie par

$$g(x) = (\text{Log } x)^2.$$

En déduire une primitive de f_k et calculer l'aire \mathcal{A}_n de la surface comprise entre l'axe $x'Ox$, la courbe (C_k) et les droites d'équations respectives $x = u_n(k)$ et $x = u_{n+1}(k)$, où $u_n(k)$ a la même signification qu'au 2. b.

Constater que \mathcal{A}_n ne dépend pas de k et que la suite qui, à tout entier naturel n , fait correspondre \mathcal{A}_n est arithmétique.

4. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis pour une primitive de f_1 sur l'intervalle $[e; x]$ et l'étude des variations de f_1 , que, pour tout x strictement supérieur à e , on a

$$(e \text{Log } x - e)^2 < 2(x - e).$$