Durée : 4 heures

Baccalauréat C Strasbourg juin 1972

EXERCICE 1

Soit (E) un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2 rapporté à une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, et f l'application linéaire, dont la matrice dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Pour tout réel, λ, on note (E_λ) l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de (E) tels que $f\left(\vec{u}\right) = \lambda \vec{u}$.

1. Démontrer que f est un automorphisme involutif de (E).
2. Démontrer que, si λ est un réel distinct de -1 et de 1, (E) se réduit au vecteur nul.
3. Déterminer (E_1) et (E_{-1}) en donnant une base pour chacun d'eux.
   Démontrer que ce sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
   En déduire une nouvelle base de (E) et donner la matrice de f dans cette base.

EXERCICE 2

On note $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}$ et $\dot{5}$ les éléments de l'anneau $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\ +, \times)$.

1. Dresser la table de multiplication de l'anneau.
2. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, l'équation $\dot{2}x = \dot{0}$.
3. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{2}x + \dot{2}y & = & \dot{4}, \\ \dot{5}x + \dot{3}y & = & \dot{3}. \end{array}\right.$$

PROBLÈME

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{R}_+$ le sous-ensemble des nombres réels positifs ou nul.

1. Étudier la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0, \\ f(x) & = & x \mathrm{Log}\, x \quad \text{pour } x > 0. \end{array}\right.$$

   On étudiera, en particulier, la continuité et la dérivabilité au point 0.
   Tracer la courbe représentative de la fonction f, le plan étant rapporté à un repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthonormé. (On prendra une unité graphique de 4 cm sur chaque axe.)
   On précisera les tangentes aux points d'intersection avec l'axe Ox.

2. Étudier la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(0) & = & 0, \\ g(x) & = & \dfrac{x^2}{2}\text{Log}\,x - \dfrac{x^2}{4} \quad \text{pour } x > 0. \end{array}\right.$$

On étudiera, en particulier, la continuité et la dérivabilité au point 0.

Tracer la courbe représentative de la fonction g sur le même graphique que la courbe représentative de f.

Préciser les tangentes aux points d'intersection avec l'axe Ox.

3. *Recherche des solutions non nulles de l'équation* $f(x) = g(x)$.

a. Démontrer que les solutions non nulles de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de la fonction logarithme népérien et de la fonction homographique, h, définie, pour x réel et distinct de 2, par $h(x) = \dfrac{x}{2(x-2)}$.

(Le tracé des courbes n'est pas demandé.)

b. Comparer les signes de $h(3) - \text{Log}\,3$ et de $h(4) - \text{Log}\,4$. En déduire l'existence d'une solution de l'équation $f(x) = g(x)$, comprise entre 3 et 4. Démontrer qu'elle est unique dans cet intervalle.

c. Démontrer, de même, l'existence et l'unicité d'une solution, notée α, comprise entre $\dfrac{1}{2}$ et 1 ; déterminer la valeur décimale approchée, à 10^{-1} près par défaut, du nombre réel α.

4. Soit t un nombre de l'intervalle ouvert $]0\,;\,\alpha[$, où α est le réel défini à la question 3. c.

a. Calculer, en fonction de t et de α, l'intégrale

$$I(t, a) = \int_t^a [g(x) - f(x)]\,\text{d}x.$$

b. Démontrer que $I(t,\ a)$ a une limite quand t tend vers 0 et que cette limite est la valeur en a d'une fraction rationnelle.