

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1975 Strasbourg ∞

EXERCICE 1

Dans un plan affine rapporté au repère (A, \vec{u}, \vec{v}) , soit B et C les points de coordonnées respectives $(1; 0)$ et $(0; 1)$.

Soit t un nombre réel non nul. On note f, g, h les homothéties de rapport t et de centres respectifs A, B, C.

À partir d'un point M quelconque du plan, on introduit les points

$$M_1 = f(M), \quad M_2 = g(M_1), \quad M_3 = h(M_2), \quad M_4 = f(M_3)$$

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM_4}$ en fonction de t et des vecteurs $\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}$.
2. Soit φ_1 l'application du plan dans lui-même définie par :

$$\varphi_1(M) = M_4 \quad \text{pour tout point } M.$$

Déterminer suivant les valeurs de t l'ensemble des points invariants par φ_1 et préciser la nature correspondante de φ_1 .

EXERCICE 2

1. x et y étant deux entiers relatifs, déterminer tous les restes possibles de la division euclidienne par 4 du nombre $x^2 - 3y^2$.
2. Existe-t-il trois entiers relatifs x, y, z tels que :

$$x^2 - 3y^2 + 4z = 3 ?$$

PROBLÈME

Soit E un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1. Au point M d'affixe $z = x + iy$ ($x; y \in \mathbb{R}^2$) on fait correspondre le point M' d'affixe

$$z' = \frac{4 - (z + \bar{z})i}{1 - i + \frac{1}{2}(z - \bar{z})}$$

où \bar{z} désigne le conjugué de z . On définit ainsi une application T de E dans E.

- a. Calculer les coordonnées $(x'; y')$ du point M' en fonction des coordonnées $(x; y)$ du point M .
- b. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit réel. Mêmes questions pour z' imaginaire pur.

- c. Écrire une équation de l'ensemble H des points M tels que M' appartienne à la droite d'équation $x = 1$.
2. a. Étudier la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 + 3}.$$

Tracer sa courbe représentative C dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- b. Dédire de l'étude précédente que f admet une fonction réciproque g , dont on précisera l'ensemble de définition D .

Montrer que, pour tout x de D , $g(x) = \frac{3 - (x-1)^2}{2(x-1)}$.

Tracer la courbe représentative C_1 de g dans le même repère.

3. a. Calculer $\int_2^{1+\sqrt{3}} g(x) dx$.
- b. En déduire $\int_0^1 f(x) dx$, puis $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} dx$.
4. Établir une équation de la courbe C' symétrique de C par rapport au point S de coordonnées $(0; 1)$, puis une équation de $\Gamma = C \cup C'$. Comparer Γ et H .
5. a. Soit \mathcal{F} l'application affine du plan E dans lui-même qui au point M de coordonnées $(x; y)$ fait correspondre le point M_1 de coordonnées $(x_1; y_1)$ tel que :

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{x}{2} \\ y_1 &= x + y \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $M_{n+1} = \mathcal{F}(M_n)$.

Calculer les coordonnées $(x_n; y_n)$ de M_n en fonction de x, y et n .

Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels x_n et y_n ont une limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

- b. Quel est l'ensemble des points invariants par \mathcal{F} ?
Soit M un point non invariant par \mathcal{F} . La droite définie par le bipoint (M, M_1) coupe Oy en P .

Montrer qu'il existe un réel non nul k , indépendant de M , tel que

$$\overrightarrow{PM_1} = k \overrightarrow{PM}.$$

et que le vecteur $\overrightarrow{MM_1}$ est colinéaire à un vecteur fixe.

- c. Quelle est une équation de Γ' , image de Γ par \mathcal{F} ?
En déduire que Γ' est une conique dont on précisera les sommets.