

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Strasbourg juin 1976 ∞

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 3 - |e^{4x} - 2e^{2x}|$$

(on désigne par e la base de la fonction logarithme népérien notée Log).

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 0$.
2. Donner la définition de la dérivabilité en x_0 d'une fonction numérique d'une variable réelle.
Application : la fonction f est-elle dérivable en $x_0 = \frac{1}{2}\text{Log} 2$?
3. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.

EXERCICE 2

Résoudre dans le corps \mathbb{C} des nombres complexes l'équation :

$$z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3}) \cdot |z|$$

Représenter les images des solutions de cette équation dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct.

PROBLÈME

Soit P un plan vectoriel, I l'application identique de P et ω l'application nulle de P .

$$I: \begin{array}{ccc} P & \rightarrow & P \\ \vec{u} & \mapsto & \vec{u} \end{array}, \quad \omega: \begin{array}{ccc} P & \rightarrow & P \\ \vec{u} & \mapsto & \vec{0} \end{array}$$

Préliminaires : Pour cette seule question P est euclidien orienté et muni d'une base orthonormée directe (\vec{i}, \vec{j}) .

Soit g la rotation vectorielle dont une mesure de l'angle est θ .

- a. Écrire la matrice de g dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .
- b. Démontrer que $g \circ g - (2 \cos \theta)g + I = \omega$.

On se propose d'étudier tous les endomorphismes f de P vérifiant :

$$f \circ f - (2 \cos \theta)f + I = \omega \quad (1)$$

où θ est un réel donné de l'intervalle $[0; 2\pi[$.

Soit f une solution de (1).

1. Chercher le noyau de f et montrer que f est une application bijective de P dans P .

2. Démontrer que si f est involutive, alors $f = (\cos\theta)I$. En déduire les valeurs de θ pour lesquelles (1) admet des solutions involutives et donner ces solutions.
3. On suppose θ différent de 0 et de π ? Soit \vec{u} un vecteur non nul de P et \vec{v} défini par :

$$\vec{v} = \frac{1}{\sin\theta} \left[-(\cos\theta)\vec{u} + f(\vec{u}) \right] \quad (2)$$

- a. Montrer que pour tout réel k , le noyau de $f - kI$ est égal à $\{\vec{0}\}$.
En déduire qu'il n'existe pas de réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ et que (\vec{u}, \vec{v}) est une base de P .
- b. En utilisant (2) déterminer la matrice de f dans la base (\vec{u}, \vec{v}) . Est-il possible de conclure que f est une rotation vectorielle?
- c. Soit φ l'application de P^2 dans \mathbb{R} , qui à tout couple (\vec{w}, \vec{w}') de P^2 tel que

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}, \quad \vec{w}' = x'\vec{u} + y'\vec{v}$$

associe le réel $xx' + yy'$.

Démontrer que φ est un produit scalaire sur P .

Vérifier que pour ce produit scalaire, la base (\vec{u}, \vec{v}) est orthonormée.

P étant muni de ce produit scalaire et de la base (\vec{u}, \vec{v}) supposée directe, quelle est la nature de f ?

4. On suppose $\theta = 0$.
- a. Vérifier que (1) est alors équivalente à

$$(f - I) \circ (f - I) = \omega \quad (3)$$

f étant une solution de (3), démontrer que le noyau de $f - I$ n'est pas $\{\vec{0}\}$.

- b. \vec{u} étant un vecteur non nul du noyau de $f - I$, soit \vec{v} un vecteur de P tel que (\vec{u}, \vec{v}) soit une base de P . La matrice de f dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ où λ et μ sont des réels.

Montrer que $\mu = 1$.

- c. Si f est solution de (3) différente de I vérifier que $f - I = s \circ h \circ p$ où p est la projection sur la droite vectorielle engendrée par \vec{v} de direction la droite vectorielle engendrée par \vec{u} , h l'homothétie vectorielle de rapport λ et s une symétrie vectorielle dont on déterminera les éléments.
- d. On définit, pour tout entier naturel n , f^n par

$$f^0 = I, \quad f^n = f^{n-1} \circ f.$$

Déterminer la matrice de f^n dans la base (\vec{u}, \vec{v}) .

N. B. - Les questions 1., 2., 3., 4. sont indépendantes entre elles et indépendantes des préliminaires.