

☞ Baccalauréat C Strasbourg juin 1977 ☞

EXERCICE 1

5 POINTS

1. Étudier la fonction f

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 1 - e^x \end{aligned}$$

Représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthonormé, préciser les branches infinies.

2. Soit λ un nombre réel et la fonction

$$\begin{aligned} f_\lambda: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda(x+1) - e^x \end{aligned}$$

On note Γ_λ la courbe représentative de f_λ .

Trouver l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles f_λ admet un maximum.

Soit M_λ le point d'ordonnée maximale de f_λ ; donner une équation de l'ensemble des points M_λ ?

EXERCICE 2

3 POINTS

Soit a un nombre réel strictement positif différent de 1.

1. Montrer qu'il existe une suite (u_n) à termes positifs définis par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = \frac{1 + au_n}{a + u_n} \end{array} \right.$$

Vérifier que la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}: v_n = \frac{-1 + u_n}{1 + u_n}$$

est une suite géométrique de raison $\frac{a-1}{a+1}$.

2. Étudier la limite de la suite (v_n) ; en déduire celle de (u_n) .

PROBLÈME 2

12 POINTS

Soit E un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par D la droite passant par O , de vecteur directeur \vec{j} , et par Γ le cercle de rayon unité ayant pour centre le point de coordonnées $(1; 0)$.

1. Soit \mathcal{A} l'ensemble des applications affines f de E dans E qui, à tout point M de coordonnées $(x ; y)$, associent le point $f(M)$ dont les coordonnées $(x' ; y')$ sont de la forme

$$\begin{cases} x' &= ax \\ y' &= bx + cy + d \end{cases}$$

où a, c sont des réels non nuls, et où b, d sont des réels quelconques.

Montrer que ces applications sont bijectives et laissent la droite D invariante ($f(D) = D$).

Réciproquement, montrer que toute application affine bijective de E dans E laissant la droite D invariante est élément de \mathcal{A} .

2. Montrer que \mathcal{A} est un groupe pour la loi de composition des applications.
3. Quels sont les éléments involutifs de \mathcal{A} ?
4. Quelles sont les similitudes directes appartenant à \mathcal{A} ? Les caractériser géométriquement.
5. À tout point M de coordonnées $(x ; y)$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$, appelé affixe de M .
Soit s l'application de E dans E qui, à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = 2\bar{z} - 3i$, où \bar{z} est le complexe conjugué de z .
Montrer que s est un élément de \mathcal{A} et construire l'ensemble $s(\Gamma)$, image de Γ par l'application s .
6. Soit f_t l'application de E dans lui-même qui, à tout point M du plan de coordonnées $(x ; y)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $(x' ; y')$ définies par

$$\begin{cases} x' &= xe^t \\ y' &= y + t \end{cases}$$

où t est un réel quelconque.

- a. Montrer que l'ensemble \mathcal{G} des applications f_t est un sous-groupe commutatif de \mathcal{A} .
- b. Étant donné un point M de coordonnées $(\alpha ; \beta)$, on désigne par $C_{(\alpha ; \beta)}$ l'ensemble des points $N = f_t(M)$, où t décrit \mathbb{R} .
Écrire une équation cartésienne de $C_{(\alpha ; \beta)}$.
Construire les ensembles $C_{(-1 ; 0)}$, $C_{(1 ; 0)}$ et $C_{(0 ; 1)}$.
- c. On pose $f_t(\Gamma) = \Gamma_t$ pour $t \in \mathbb{R}^*$.
Montrer que f_t est une conique dont on donnera une équation réduite et dont on calculera les coordonnées des sommets en fonction de t .
- d. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles Γ_t est tangente à la droite d'équation $y = 0$.
Construire les coniques correspondantes.