

## Baccalauréat C Strasbourg juin 1979

### EXERCICE 1

4 POINTS

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$z^2 - (2 + \sqrt{3}i)z - 2 + \sqrt{3}i = 0.$$

2. Soit  $P$  un plan affine euclidien orienté muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé direct. On considère l'application  $f$  de  $P$  dans  $P$  qui au point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par :

$$z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} + \frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- a. Montrer que  $f$  est un antidéplacement. Montrer que  $f = s_D \circ t_{\vec{\omega}}$  où  $s_D$  est la symétrie orthogonale par rapport à une droite  $D$  et  $t_{\vec{\omega}}$  la translation de vecteur  $\vec{\omega}$ ,  $\omega$  appartenant à la direction de  $D$ ; déterminer  $D$  et  $\omega$ .
- b. Soit  $C$  le cercle de centre  $\Omega$  de coordonnées  $(0; -\sqrt{3})$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et de rayon 1. Déterminer l'image par  $f$  de  $C$ .

### EXERCICE 2

3 POINTS

Déterminer l'ensemble des couples  $(x; y)$  d'entiers naturels qui vérifient

$$\begin{cases} \delta = 60 \\ \mu = 3600 \end{cases}$$

ou  $\delta$  désigne le pgcd de  $x$  et  $y$  et de  $y, \mu$  leur ppcm.

### PROBLÈME

13 POINTS

Soit  $P$  un plan affine euclidien muni d'un repère  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé.

Pour tout  $m$  réel, on note  $C_m$  l'ensemble des points  $M$ , dont les coordonnées  $(x; y)$ , strictement positives dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , vérifient la relation :

$$\log x \cdot \log y = m.$$

- Montrer que pour tout  $m$  réel,  $C_m$  est non vide.
- Définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation  $y = x$ . Montrer que pour tout  $m$  de  $\mathbb{R}$ ,  $C_m$  est globalement invariant dans cette symétrie.
- Déterminer  $C_0$ .
- a. Montrer que si  $m$  est non nul,  $C_m$  est la représentation graphique de la fonction

$$f_m : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{m}{\log x}} \text{ et vérifier que } f_m \text{ est involutive.}$$

- b. Étudier les limites de  $f_m$  aux bornes de son ensemble de définition.  
 c. Pour tout réel  $m$  non nul, on considère la fonction  $g_m$  définie par

$$\begin{aligned} g_m : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_m(x) \text{ pour } x \text{ élément de } \mathbb{R}_+^* - \{1\} \\ 0 &\mapsto 1 \\ 1 &\mapsto 0 \end{aligned} .$$

Dresser dans chaque cas ( $m$  strictement positif et  $m$  strictement négatif) le tableau de variation de  $g_m$

5. Étudier la limite de  $\frac{e^{\frac{m}{\log x}} - 1}{\frac{m}{\log x}}$ , quand  $x$  tend vers zéro par valeurs positives ( $m$  est un réel non nul).

Étudier la limite de  $\frac{m}{\log x} e^{\frac{m}{\log x}}$ , quand  $x$  tend vers 1, par valeurs inférieures pour  $m$  strictement positif, par valeurs supérieures pour  $m$  strictement négatif.

En déduire que :

$$\begin{aligned} \text{pour } m > 0 & \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g_m(x) - g_m(0)}{x} = -\infty \\ \text{pour } m < 0 & \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g_m(x) - g_m(0)}{x} = +\infty \\ \text{pour } m > 0 & \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g_m(x) - g_m(1)}{x - 1} = 0 \\ \text{pour } m < 0 & \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g_m(x) - g_m(1)}{x - 1} = 0 \end{aligned} .$$

Donner des vecteurs directeurs des demi-tangentes à la courbe représentative de  $g_m$  aux points d'abscisse 0 et 1.

6. a. Représenter graphiquement  $C_1$ ,  $C_{-1}$  et  $C_0$  sur une même figure.  
 Préciser les intersections de  $C_1$  et de la droite d'équation  $y = x$  et donner un vecteur directeur des tangentes en ces points,  
 b. Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points  $M$  dont les coordonnées  $(x; y)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  vérifient la relation :

$$\log^2 |x| \cdot \log^2 |y| = 1.$$

Montrer que les droites d'équation  $x = 0$  et  $y = 0$  sont axes de symétrie de  $\mathcal{C}$  et que l'ensemble des points de  $\mathcal{C}$ , dont les deux coordonnées sont positives est égal à  $C_1 \cup C_{-1}$ . En déduire la représentation graphique de  $\mathcal{C}$ .

7. On considère le point mobile  $M_1$  dont les coordonnées à tout instant  $t$  supérieur ou égal à 1 sont données dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  par :

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t} \\ y_1(t) = e^{\frac{1}{t}} \end{cases}$$

- a. Donner la trajectoire du mouvement et préciser le sens de parcours.
- b. Préciser si le mouvement est uniforme, accéléré ou retardé sur l'intervalle de temps  $[1; +\infty[$ .
- c. On considère le point  $M_2$  mobile sur  $C_1$  qui à tout instant  $t$  a même abscisse que  $M_1$ . Donner les coordonnées  $(x_2(t); y_2(t))$  de  $M_2$  à tout instant  $t$  supérieur ou égal à 1.

Donner la trajectoire de  $M_2$  et préciser le sens de parcours.

On appelle  $\overrightarrow{V_1(t)}$  la vitesse de  $M_1$  à l'instant  $t$  et  $\overrightarrow{V_2(t)}$  la vitesse de  $M_2$  à l'instant  $t$ .

Comparer  $\|\overrightarrow{V_1(t)}\|$  et  $\|\overrightarrow{V_2(t)}\|$  à tout instant  $t$ .