

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Strasbourg ∞

EXERCICE 1

4 points

1. On appelle diviseur strict d'un entier naturel tout diviseur autre que le nombre lui-même.  
Déterminer les entiers naturels diviseurs stricts de 220.
2. On appelle nombres amiables deux entiers naturels tels que chacun d'eux soit égal à la somme des entiers naturels diviseurs stricts de l'autre. Vérifier que 220 et 284 sont amiables.
3. a. On appelle nombre parfait un nombre égal à la somme de ses diviseurs stricts (amiable avec lui-même). Le nombre 28 est-il parfait?  
Déterminer un entier  $p$  premier tel que le nombre  $24p$  soit parfait.  
b. Plus généralement, soit  $n$  et  $p$  deux entiers naturels,  $p$  premier; quelle doit être l'expression nécessaire de  $p$  en fonction de  $n$  pour que  $2^n \cdot p$  soit parfait? Donner la liste des nombres parfaits de cette forme pour  $n < 10$ .

EXERCICE 2

4 points

*Fonction scalaire de Leibniz*

Dans un plan affine euclidien  $\mathcal{P}$ , on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que  $\|\overrightarrow{AB}\| = a$  ( $a$  est un réel strictement positif donné).

1. Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A, 2), (B, 1) et (C, 1).
2. Pour tout point M du plan  $\mathcal{P}$ , on pose

$$\vec{v} = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

Démontrer que  $\vec{v}$  est un vecteur constant, indépendant de M.

Construire le point A' tel que  $\overrightarrow{A'N} = \vec{v}$ . Calculer  $\|\overrightarrow{A'N}\|$  et  $\|\overrightarrow{AG}\|$  en fonction de  $a$ .

3. Déterminer et construire l'ensemble ( $\gamma$ ) des points du plan  $\mathcal{P}$  tels que

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

4. Déterminer et construire l'ensemble ( $\epsilon$ ) des points du plan  $\mathcal{P}$  tels que

$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2.$$

(On pourra remarquer que le point G appartient à ( $\epsilon$ ).)

**PROBLÈME****12 points**

Dans l'espace vectoriel  $\mathcal{F}$  de toutes les fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R}$ , on considère l'ensemble  $\mathcal{E}$  des fonctions  $f$  définies par

$$\begin{aligned} \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad x \in \mathbb{R}, \\ f(x) = e^{-x}(a \cos x + b \sin x + cx \cos x + dx \sin x). \end{aligned}$$

**Partie A**

1. Montrer que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}$ . On pourra utiliser les valeurs de ces fonctions en  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ .
2. Soit les quatre fonctions de  $\mathcal{E}$  suivantes :

$$\begin{aligned} f_1: x \mapsto e^{-x} \cos x; \quad f_2: x \mapsto xe^{-x} \cos x; \\ f_3: x \mapsto e^{-x} \sin x; \quad f_4: x \mapsto xe^{-x} \sin x. \end{aligned}$$

Montrer que  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  est un système libre de  $\mathcal{E}$ .

En déduire que  $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$  est une base de  $\mathcal{E}$ .

3. a. Calculer les dérivées  $f'_1, f'_2, f'_3, f'_4$  de  $f_1, f_2, f_3, f_4$  et montrer qu'elles appartiennent à  $\mathcal{E}$ ; en déduire que

$$\begin{aligned} D: \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ f &\mapsto D(f) = f' \end{aligned}$$

est un endomorphisme de  $\mathcal{E}$ .

- b. Si une fonction  $f$  de  $\mathcal{E}$  a pour composantes  $(a, b, c, d)$  dans la base  $B$ , quelles sont les composantes de  $D(f)$  dans  $B$ ?
- c. Déterminer le noyau de  $D$ . En déduire que  $D$  est un automorphisme de  $\mathcal{E}$ . Définir analytiquement l'application réciproque  $D^{-1}$  de  $D$ . Si  $f$  est élément de  $\mathcal{E}$ , que représente  $D^{-1}(f)$ ?

**Partie B**

Soit la fonction  $f$  de  $\mathcal{E}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x + 2x \sin x).$$

1. Étudier les variations de cette fonction sur  $[0, \pi]$  et tracer la courbe représentative  $\mathcal{C}$  dans un repère orthogonal. On prendra pour unités :  
sur  $Ox$ ,  $\pi$  est représenté par 12 cm;  
sur  $Oy$  l'unité est 4 cm.

2. On désigne par  $g$  la restriction de  $f$  à  $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ . Déterminer  $J = g(I)$ . En déduire que  $g$  est une bijection de  $I$  sur  $J$ .

Soit  $g^{-1} : J \rightarrow I$  la bijection réciproque de  $g$ . Quel est le domaine de dérivabilité de  $g^{-1}$ ? Représenter graphiquement  $g$  et  $g^{-1}$  dans un même repère orthonormé (unité : 4 cm).

3. a. Montrer que l'équation  $\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in [0; \pi] \end{cases}$  admet une unique solution  $x_0$ . Vérifier que  $x_0$  appartient à l'intervalle  $\left]\frac{5\pi}{6}; \pi\right[$ .

- b. Calculer pour tout élément  $k$  de  $\mathbb{Z}$ ,  $f(2k\pi)$ ,  $f(\pi + 2k\pi)$ ,  $f(2\pi + 2k\pi)$ .

Montrer que sur l'intervalle  $]2k\pi; 2k\pi + 2\pi[$ , la fonction  $f$  admet exactement un maximum et un minimum qui sont de signes contraires.

- c. Déduire du résultat précédent que pour tout élément  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet sur l'intervalle  $]k\pi; k\pi + \pi[$  une solution unique.

Quelques valeurs :  $e^{-\frac{\pi}{4}} \approx 0,46$  ;  $e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,20$  ;  $e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx 0,09$ ;

$e^{-\pi} \approx 0,04$ .