

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Sud-Cameroun juin 1969 ∞

**EXERCICE 1**

Dans l'ensemble, E, des couples de nombres réels  $(a, b)$ , le premier terme,  $a$ , n'étant pas nul, on définit une loi de composition interne, notée  $\star$  par la condition

$$(a, b) \star (a', b') = (aa', ab' + b).$$

1. Montrer que E est un groupe pour cette loi de composition. Ce groupe est-il commutatif?
2. Montrer que l'ensemble, F, des éléments de E de la forme  $(a, 0)$  constitue aussi un groupe pour la même loi  $\star$ .

On considère l'application  $h$  de F dans l'ensemble,  $\mathbb{R}'$ , des nombres réels non nuls, définie par  $h[(a, 0)] = a$ .

Montrer que c'est un isomorphisme de F dans l'ensemble  $\mathbb{R}'$  muni de la multiplication des nombres réels.

**EXERCICE 2**

1. Résoudre dans l'ensemble,  $\mathbb{C}$ , des nombres complexes les équations suivantes :

a.  $z^2 = 2i$ ;

b.  $f(x) = x^2 - 4x + 5 = 0$ .

2. Montrer que le polynôme

$$g(x) = x^2 - (1 + 2i)x^2 - 3x + 2i - 1$$

admet pour zéro l'un des zéros de  $f(x)$ .

3. Décomposer  $g(x)$  en un produit de facteurs du premier degré à coefficients réels ou complexes.

**PROBLÈME**

Soit un repère orthonormé  $xOy$  et le point A de coordonnées

$$x = \frac{2}{9} \quad \text{et} \quad y = -\frac{3}{2}.$$

On considère la droite (D) de coefficient directeur  $t$  passant par O et la droite (D') passant par A dont le coefficient directeur,  $t'$ , est tel que

$$3tt' + t - t' + 1 = 0.$$

On suppose que  $t$  représente le temps et varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

1. Les droites (D) et (D') peuvent-elles être parallèles?

On appelle  $M$  leur point d'intersection. Montrer que, lorsque  $t$  varie,  $M$  décrit l'ellipse (E) d'équation

$$\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 0.$$

Tracer cette ellipse. Quelles sont les coordonnées des foyers de (E) et les équations de ses directrices? Comment le point  $M$  décrit-il sa trajectoire?

2. On pose  $t = \operatorname{tg} \theta$ ,  $\theta$  variant de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $+\frac{\pi}{2}$
- Calculer en fonction de  $\theta$  la longueur du segment  $OM$  et tracer la courbe représentative des variations de  $OM$  en fonction de  $\theta$ .
  - Soit B le point de coordonnées  $x = 6$ ,  $y = 0$ .  
Calculer en fonction de  $\theta$  l'aire,  $s$ , du triangle  $OMB$ ; étudier les variations de la fonction  $s(\theta)$  ainsi obtenue et tracer sa représentation graphique, (L), dans un repère orthonormé  $\theta O s$ .  
Calculer l'aire géométrique de la surface comprise entre la courbe (L) et l'axe des abscisses.
3. On considère la transformation qui, au point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que

$$z' = 6 \frac{\bar{z}}{z},$$

$\bar{z}$  étant le conjugué de  $z$ .

Lorsque  $M$  décrit sa trajectoire, (E),  $M'$  décrit une courbe (C), que l'on déterminera. Comment  $M'$  décrit-il sa trajectoire? Trouver un produit de transformations qui, à la courbe (E), fasse correspondre le cercle (C).