

## ☞ Baccalauréat Sud Vietnam juin 1972 ☞

### Baccalauréat C

#### EXERCICE 1

Le plan affine euclidien,  $E$ , étant rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on associe à tout point  $M$ , de coordonnées  $(x; y)$ , son affixe  $z = x + iy$ .

Soit  $T$  la transformation ponctuelle de  $E$  qui, à tout point  $M(x; y)$  d'affixe  $z$ , fait correspondre le point  $M'(x'; y')$  d'affixe  $z'$  définie par

$$z' = (1 - i)z + 2 - i.$$

1. Préciser la nature géométrique de la transformation  $T$  ainsi que les éléments géométriques servant à la définir.
2. Quelle est l'image par la transformation  $T$  du cercle  $(C)$  de centre  $O$  et de rayon 1?

#### EXERCICE 2

Si  $d$  est le PGCD des deux entiers naturels  $a$  et  $b$ , quel est le PGCD des entiers  $a' = 13a + 5b$  et  $b' = 5a + 2b$ ?

#### PROBLÈME

À chaque entier naturel  $n$ , non nul, on associe la fonction  $f_n$  qui, à tout réel  $x$  strictement positif, associe le nombre réel

$$y = f_n(x) = \frac{x^n + 1}{4x^2}.$$

1. Étudier les fonctions  $f_1$  et  $f_2$   $\left[ f_1(x) = \frac{x+1}{4x^2} \text{ et } f_2(x) = \frac{x^2+1}{4x^2} \right]$  et construire leurs courbes représentatives  $(C_1)$  et  $(C_2)$  dans un plan  $(P)$ , rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
2. Pour  $n > 2$ , étudier la fonction  $f_n$  :
  - a. sa continuité,
  - b. son sens de variation; on désignera par  $x_n$  la valeur de  $x$  pour laquelle  $f_n$  présente un minimum,
  - c. les valeurs limites  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .

On étudiera, suivant la valeur de l'entier  $n$ , l'existence d'asymptotes à la courbe  $(C_n)$ .

Construire la courbe  $(C_3)$  représentative de la fonction  $f_3$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
3. Dans cette question, on désire encadrer le nombre  $x_n$ .
  - a. Suivant la valeur de l'entier  $n$  strictement supérieur à 2, comparer les nombres  $x_n$  et 1.

- b.** Démontrer que la différence  $x_n - \frac{1}{2}$  a même signe que la différence  $x_n^n - \frac{1}{2^n}$ .

On considère la fonction,  $\varphi$ , qui, à tout nombre réel  $x$  strictement positif, associe le nombre

$$\varphi(x) = 2^{x+1} - x + 2.$$

Étudier les variations de la fonction  $\varphi$  et montrer qu'elle est strictement positive, quel que soit le nombre réel  $x$  strictement positif.

Montrer que, pour tout entier  $n$  strictement supérieur à 4, le réel  $x_n$  appartient à l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

- 4.** Étudier l'intersection des courbes  $(C_n)$  et  $(C_{n'})$ , pour deux entiers distincts  $n$  et  $n'$ .  
En déduire que toutes les courbes  $(C_n)$  passent par un même point, B, dont on précisera les coordonnées.  
On suppose  $n < n'$ ; comparer, suivant les valeurs de  $x$  strictement positives, les nombres  $f_n(x)$  et  $f_{n'}(x)$ .  
En déduire la position relative des courbes  $(C_n)$  et  $(C_{n'})$ .
- 5.** Construire dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe représentative,  $(C)$ , de la fonction qui, à tout réel  $x$  strictement positif, associe le nombre  $y = \frac{1}{4x^2}$ .  
 $n$  étant un entier donné, montrer que la courbe  $(C)$  est située en-dessous de la courbe  $(C_n)$  et calculer l'aire  $\mathcal{A}(t)$  de la partie du plan (P) qui est limitée par les courbes  $(C)$  et  $(C_n)$  et par les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = t$ .  
Étudier la limite de  $\mathcal{A}(t)$  lorsque  $t$  tend vers 0.