∽ Baccalauréat Sud Viet-Nam septembre 1964 ∾
mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Soit $z = \cos a + \mathrm{i}\sin a$ un nombre complexe d'image m et soit $Z = 1 + z = 1 + \cos a + \mathrm{i}\sin a$ un nombre complexe d'image M.

1. Construire M, connaissant a $(0 \leqslant a < \pi)$.
2. Déterminer en fonction de a le module r et l'argument θ de Z.

EXERCICE 2

1. Soit un plan rapporté à un repère orthonormé formé de deux axes $X'\mathrm{O}X, Y'\mathrm{O}Y$ tels que
$\left(\overrightarrow{X'X},\ \overrightarrow{Y'Y}\right) = +\dfrac{\pi}{3}$. On considère la fonction
$$y = \frac{ax^2 + bx}{x^2 + x - 2}$$
où a et b représentent les coordonnées d'un point M du plan (a, abscisse ; b, ordonnée).
Dans quelle région du plan doit-on prendre le point M pour que la fonction y reste monotone sur chacun des intervalles où elle est définie ?
2. Soit maintenant, et pour le reste du problème, $a = 3,\ b = -6$. On a alors
$$(1) \qquad y = \frac{3x(x-2)}{x^2 + x - 2}.$$
Mettre y sous la forme $y = A + \dfrac{Bx + C}{x^2 + x - 2}$ puis sous la forme
$$(2) \qquad y = A + \frac{M}{x-1} + \frac{N}{x+2},$$
A, B, C, M, N étant des constantes, que l'on déterminera.
3. Étudier les variations de la fonction y et tracer son graphe, (C) (repère orthonormé $x'\mathrm{O}x,\ y'\mathrm{O}y$).
4. La droite $y = m$ coupe, en général, (C) en deux points, M' et M'', se projetant en P' et P'' sur l'axe $x'x$, d'abscisses respectives x' et x''.
Trouver une relation indépendante de m entre x' et x''.
Montrer que, par un changement d'origine sur l'axe des abscisses (O$'$, nouvelle origine) et posant $\overline{\mathrm{O}'P'} = X'$, $\overline{\mathrm{O}'P''} = X''$, on peut écrire $X'X'' = k$, k étant une constante à déterminer.
En déduire que les cercles de diamètre P$'$P$''$ passent par deux points fixes, A et B, quand m varie.

5. En utilisant la forme (2) de y, déterminer une primitive de y.
   En déduire l'aire limitée par (C), l'axe $x'x$, les droites $x = 2$ et $x = 4$.
6. On considère l'équation

$$(m-3)\mathrm{e}^{2u} + (m+6)\mathrm{e}^{u} - 2m = 0,$$

   où u est l'inconnue, e la base des logarithmes népériens.
   Déterminer (de préférence graphiquement) le nombre de racines de cette équation en u selon les diverses valeurs de m.
   Calculer u dans le cas où $m = \dfrac{9}{5}$.

N. B. - On donnera les résultats numériques demandés aux questions 5 et 6 avec l'approximation des tables utilisées ; tables de logarithmes à 5 décimales, ou tables de logarithmes népériens, ou d'exponentielles. (Indiquer sur la copie la table utilisée.)