

☞ Baccalauréat C Sud Vietnam juin 1971 ☞

EXERCICE 1

Résoudre dans le corps des complexes l'équation en z

$$z^2 + (5i - 6)z - 16i + 2 = 0.$$

EXERCICE 2

1. Montrer que, quels que soient les nombres réels x et y , on a

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x + y) \sin(x - y).$$

2. Montrer qu'il existe un nombre réel a , appartenant à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, tel que, quel que soit le nombre strictement positif k satisfaisant aux relations

$$a - k \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad a + k \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$$

les trois nombres $\sin^2(a - k)$, $\sin^2 a$ et $\sin^2(a + k)$ soient trois termes consécutifs d'une progression arithmétique.

PROBLÈME

d et r étant deux nombres réels donnés tels que $0 < r < d$, on considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$, la droite (Δ) d'équation $x = d$ et le cercle (Γ) de centre O et de rayon r .

L'axe $x'Ox$ est coupé par (Δ) en B et par (Γ) en A d'abscisse r et en A' d'abscisse $-r$. On pose

$$(\Delta') = (\Delta) - \{B\}.$$

M étant un point quelconque de (Δ') , la droite MA coupe (Γ) en un point P distinct de A ; de même, la droite MA' recoupe (Γ) en P' .

1. Quelle est, dans l'inversion de pôle M qui laisse (Γ) invariant, la figure transformée du cercle (Ω) circonscrit au triangle MPP' ?
Montrer que (Ω) est orthogonal à (Γ) .
2. À tout point M de (Δ') , on associe le point ω , centre du cercle (Ω) .
Quel est l'ensemble des points ω lorsque M décrit (Δ') ?
3. Montrer que, lorsque M décrit (Δ') , la droite PP' passe par un point fixe S .
Exprimer les coordonnées de S au moyen de d et de r .

4. M étant un point de (Δ') , montrer qu'il existe un cercle (Φ) orthogonal à (Ω) en M et orthogonal à (Γ) . Si M est en B , on prend comme cercle (Φ) le cercle orthogonal à $x'Ox$ en B et orthogonal à (Γ) . Ainsi, à tout élément M de (Δ) , on associe un cercle (Φ) . Montrer que, lorsque M décrit (Δ) , (Φ) reste tangent à une droite fixe et à un cercle fixe, dont on précisera le centre et le rayon.
5. M est un point de (Δ') . Le cercle (Ω) et le cercle circonscrit au triangle MAA' se coupent en M et en un second point, N . Quel est l'ensemble de ces points N lorsque M décrit (Δ') ?
6. M est un point de (Δ') . Le cercle circonscrit au triangle MAA' coupe l'axe $y'Oy$ en deux points Q et Q' .
Construire l'orthocentre du triangle BQQ' . Quelle remarque peut-on faire à son sujet?
Soit K et K' les pieds des hauteurs du triangle BQQ' issues de Q et Q' respectivement. Quel est l'ensemble des points K et K' lorsque M décrit (Δ') ?