∽ Techniciens supérieurs de l'aviation 2013 ∾
Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE

L'usage de calculatrices, de téléphones portables ou de documents personnels n'est pas autorisé

QUESTIONS LIÉES

1 et 2

3 à 5

6 à 13

14 et 15

PARTIE I

L'espace uni d'un repère orthonormal $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right)$.
On note (D) la droite passant par les points A$(1~;~-2,-1)$ et B$(3~;~-5~;~-2)$ et $\left(D'\right)$ la droite ayant pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 2-k\\ y&=&1+2k\\ z&=&k\end{array}\right., \text{avec} k \in \mathbb{R}$$

On considère le plan $P)$ d'équation : $4x+y+5z+3=0$

Question 1 :

On montre que

A. la droite (D) a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l c r}x &=& 1+2t\\ y&=&-2+3t\\ z&=&1+t\end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$

B. la droite (D) est dirigée par dirigée par le vecteur de coordonnées $(-1~;~2~;~1)$

C. les droites (D) et (D') sont parallèles car elles ne sont pas sécantes

D. les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires car elles ne sont pas parallèles et n'ont aucun point commun puisque le système $\left\{\begin{array}{l c r}1+2t &=& 2-k\\ -2-3t&=&1+2k\\ -1-t&=&k\end{array}\right.$ n'a pas de solution

Question 2 :

On montre que

A. le plan (P) contient la droite (D)

B. le plan (P) contient la droite (D')

C. le plan (P) et la droite (D') se coupent en un seul point dont les coordonnées sont $(6\ ;\ -7\ ;\ -4)$

D. le plan (P) et la droite (D) se coupent en un seul point dont les coordonnées sont $(-7\ ;\ 10\ ;\ 3)$

PARTIE II

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1 - \text{i}$ et $z_{\text{B}} = 2 + \sqrt{3} + \text{i}$.

Question 3 :

Le complexe z_{A} a

A. pour module $|z_{\text{A}}| = 2$

B. pour module $|z_{\text{A}}| = \sqrt{1 + \text{i}^2} = 0$

C. pour argument $\arg(z_{\text{A}}) = \pi/4$

D. pour argument $\arg(z_{\text{A}}) = 7\pi/4$

Question 4 :

La forme algébrique du complexe $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}}$ s'écrit

A. $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}} = \left(1 - \sqrt{3}\right) + \text{i}\dfrac{3 - \sqrt{3}}{2}$

B. $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}} = -\left(1 - \sqrt{3}\right) + \text{i}\dfrac{3 - \sqrt{3}}{2}$

C. $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}} = \left(1 + \sqrt{3}\right) + \text{i}\dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$

D. $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}} = \left(1 + \sqrt{3}\right) + \text{i}\dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$

Question 5 :

On en déduit que le complexe z_{B} a

A. pour module $|z_{\text{B}}| = 1 + \sqrt{3}$

B. pour module $|z_{\text{B}}| = \sqrt{6} + \sqrt{3}$

C. pour argument $\arg(z_{\text{B}}) = -\pi/4 + \pi/3 = \pi/12$

D. pour argument $\arg(z_{\text{B}}) = 7\pi/12$

PARTIE III

Soit n un entier naturel. On note f_n la fonction définie sur l"ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+\mathrm{e}^{-x})}$$

e désigne la fonction exponentielle et ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

Question 6 :

La fonction f_0

A. a pour dérivée $f_0'(x) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$ pour tout x réel

B. a pour dérivée $f_0'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$ pour tout x réel.

C. est décroissante sur $\mathbb{R}$

D. est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$ et croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

Question 7 :

On établit que

A. la fonction f_0 a pour limite 0 lorsque x tend vers $-\infty$ et 1 lorsque x tend vers $+\infty$

B. la fonction f_0 a pour limite 1 lorsque x tend vers $-\infty$ et 0 lorsque x tend vers $+\infty$

C. la courbe $\mathscr{C}_0$ admet pour asymptotes les droites d'équation $y = 0$ et $y = 1$

D. la courbe $\mathscr{C}_0$ admet pour asymptotes horizontales les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

Question 8 :

On montre que

A. $f_0(x) = -f_1(-x)$ pour tout x réel

B. $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout x réel

C. la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $f_1'(x) = f_0'(-x) > 0$ pour tout x réel

D. la fonction f_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car $f_1'(x) = -f_0'(x) < 0$ pour tout x réel

Question 9 :

On établit que

A. les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ sont symétriques par rapport à 1 ordonnées car $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout x réel

B. les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées car $f_0(x) = -f_1(-x)$ pour tout x réel

C. les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ sont des droites parallèle

D. les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ ont un point commun de coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$

Question 10 :

Pour tout n entier supérieur ou égal 2, la fonction f_n

A. n'admet pas de limite en $-\infty$

B. a pour limite 1 lorsque x tend vers $-\infty$

C. a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et 0 lorsque x tend vers $-\infty$

D. a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et 0 lorsque x tend vers $+\infty$

Question 11 :

Pour tout n entier supérieur ou égal 2, la fonction f_n

A. a pour dérivée $f'n(x) = \dfrac{n\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^{-x}}$ pour

B. a pour dérivée $f'n(x) = -\dfrac{n\mathrm{e}^{-nx} + (n-1)\mathrm{e}^{(n-1)x}}{\left(\mathrm{e}^{-nx} + \mathrm{e}^{(n-1)x}\right)^2}$

C. est décroissante et minorée par 0 sur $\mathbb{R}$

D. est croissante et minorée par 0 sur $\mathbb{R}$

Pour tout entier naturel n, u_n représente l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

Question 12 :

La suite (u_n) vérifie

A. $u_1 = -\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{1+\mathrm{e}^{-1}} + \dfrac{1}{2}$ et $u_0 = 1 - u_1$

B. $u_1 = \ln(2) - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-1}\right)$ et $u_0 = 1 - \ln(2) + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-1}\right))$

C. $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout n entier naturel

D. $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ pour tout n entier naturel

Question 13 :

La suite (u_n)

A. n'est pas convergente car elle est croissante et non majorée

B. est convergente car elle est croissante et majorée

C. est convergente car elle est décroissante et minorée

D. a pour limite 0 car, pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$

PARTIE IV

La durée de vie d'un téléphone portable (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), mesurée en années, est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.
Pour tout t réel positif, on note $p(X \leqslant t)$ la probabilité qu'un téléphone portable ait une durée de vie inférieur à t années.
e désigne la fonction exponentielle et ln la fonction logarithme népérien.

Question 14 :

On suppose, dans cette question, que la probabilité qu'un téléphone portable portable ait une durée de vie strictement supérieure À deux années est égale à e^{-2}, on a

A. $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^1 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ pour tout t réel positif

B. $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^1 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}$

C. $\lambda = \dfrac{\ln \mathrm{e}^2}{2} = 1$

D. $\lambda = \dfrac{\ln \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2 - 1}}{2}$

Question 15 :

Reprenant la valeur du paramètre λ de la question précédente, on note $p_{X>1}(X > 4)$ la probabilité qu'un téléphone portable ait une durée de vie supérieure à 4 années sachant qu'il n'a pas eu de panne au cours de la première année. On a

A. l'espérance de X vaut $E(X) = \lambda = 1$

B. l'espérance de X vaut $E(X) = \displaystyle\int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda} = 1$

C. $p_{X>1}(X > 4) = p(X > 4) = 1 - p(X \leqslant 4) = \mathrm{e}^{-4}$.

D. $p_{X>1}(X > 4) = \dfrac{P(X > 4)}{p(X > 1)} = \dfrac{(1 - p(X \leqslant 4}{1 - p \leqslant 1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-4}}{\mathrm{e}^{-1}}$