∽ Techniciens supérieurs de l'aviation 2020 ∾
Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE

MATHÉMATIQUES

Questions liées

1 à 7
8 à 12

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement les ensembles des réels, des entiers naturels, des entiers relatifs et des nombres complexes.
Le nombre i désigne le nombre complexe défini par $\mathrm{i}^2 = -1$.

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$ par :

$$f(x) = \sqrt{1-0,25x^2}.$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Question 1
Un calcul de $f(-x)$ donne

A. $f(-x) = f(x)$: la fonction f est impaire.
B. $f(-x) = -f(x)$: la fonction f est paire.
C. Le point O$(0\,;\,0)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
D. La droite d'équation $x = 0$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

Question 2
Le calcul de la dérivée f' de la fonction f donne :

A. $f'(x) = -0,5x\sqrt{1-0,25x^2}$, $x \in [-2\,;\,2]$
B. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-0,25x^2}}$, $x \in [-2\,;\,2]$
C. $f'(x) = -\dfrac{0,25x}{2\sqrt{1-0,25x^2}}$, $x \in [-2\,;\,2]$
D. $f'(x) = \dfrac{0,25x}{2\sqrt{1-0,25x^2}}$, $x \in [-2\,;\,2]$

Question 3
Ainsi, on en déduit :

A. La fonction f est croissante sur $]-2\,;\,0[$ et décroissante sur $]0\,;\,2[$.
B. La fonction f est décroissante sur $]-2\,;\,0[$ et croissante sur $]0\,;\,2[$.
C. La fonction f est croissante sur $]-2\,;\,2[$.
D. La fonction f est décroissante sur $]-2\,;\,2[$.

Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,2[$, on note :

A le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,
D le point de coordonnées $(-x\ ;\ 0)$,
B le point de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,
et C le point de coordonnées $(-x\ ;\ f(-x))$.

Question 4
Soit g la fonction qui à tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,2[$ associe l'aire du rectangle ABCD.
On a :

A. $g(x) = x\sqrt{1-0,25x^2}$
B. $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-0,25x^2}}$
C. $g(x) = \sqrt{4x^2-x^4}$
D. $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-0,25x^2}}$

Question 5
Ainsi, la dérivée g' de la fonction g sur $]0\,;\,2[$ peut s'écrire :

A. $g'(x) = \dfrac{1-0,5x^2}{\sqrt{1-0,25x^2}}$
B. $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-0,25x^2}}$
C. $g'(x) = \dfrac{1-0,5x^2}{2\sqrt{1-0,25x^2}}$
D. $g'(x) = \dfrac{2-x^2}{\sqrt{1-0,25x^2}}$

Question 6
L'aire du rectangle ABCD est alors maximale pour :

A. $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
B. $x = \sqrt{2}$
C. $x = 2$
D. $x = 0,5$

Question 7
La valeur maximale S de cette aire est ainsi :

A. $S = 2$
B. $S = 1$
C. $S = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
D. $S = 4$

Partie II

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier n non nul :

— G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;

— p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

Question 8

On montre que :

A. $p_2 = 0,6$
B. $p_2 = 0,78$
C. $p_2 = 0,62$
D. $p_2 = 0,8$

Question 9

Le joueur a gagné la deuxième partie. La probabilité $\tilde{p}$ qu'il ait perdu la première est :

A. $\tilde{p} = \dfrac{1}{19}$
B. $\tilde{p} = \dfrac{18}{31}$
C. $\tilde{p} = \dfrac{4}{19}$
D. $\tilde{p} = \dfrac{27}{31}$

Question 10

On montre, que pour tout entier naturel n non nul :

A. $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$
B. $p_{n+1} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}p_n$
C. $p_{n+1} = \dfrac{4}{5}p_n + \frac{1}{10}$
D. $p_{n+1} = \dfrac{9}{10} - \dfrac{4}{5}p_n$

Question 11

Ainsi, pour tout entier naturel n non nul :

A. $p_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{7}{6}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n$
B. $p_n = \dfrac{3}{4} + \dfrac{13}{4}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n$
C. $p_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$
D. $p_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{4}{5}\right)^n$

Question 12

On obtient ainsi :

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$
B. $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{3}{4}$
C. $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{3}$
D. $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$

Partie III

Les questions de cette partie sont indépendantes

Question 13

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1+\text{i},\, b = 3\text{i},\, c = \left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)+\text{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right).$$

A. Le triangle ABC est un triangle rectangle. **B.** Le triangle ABC est un triangle isocèle. **C.** Le triangle ABC est un triangle équilatéral. **D.** Le triangle ABC est un triangle ni rectangle, ni isocèle, ni équilatéral.

Question 14

Soit le nombre complexe $z = \left(\sqrt{3}3+\text{i}\right)^{1\,515}$.

A. Le nombre complexe z est un réel.
B. Le nombre complexe z est un imaginaire pur.
C. $\arg(z) = \dfrac{1\,515\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
D. $|z| = \left(\sqrt{2}\right)^{1\,515}$.

Question 15

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions :

$$|z-1| = |z-\text{i}| \quad \text{et} \quad |z-1-2\text{i}| \leqslant 3.$$

On désigne par C le cercle de centre le point de coordonnées $(1\,;\,2)$ et de rayon 3, et par Δ la droite d'équation $y = x$.
A. L'ensemble S est la réunion des ensembles C et Δ
B. L'ensemble S est l'intersection des ensembles C et Δ
C. Soient A et B les points d'intersection de C et Δ. L'ensemble S est le segment [AB].
D. L'ensemble S est réduit au point $\text{I}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$