∽ Évaluation ESciA session 25 mars 2023 ∽

Mathématiques expertes Épreuve 2 , option B

Durée : 1h 30 min

FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

• Les questions à *choix multiples* sont numérotées M1, M2, etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □.
Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse.
Toute réponse fausse retire des points aux candidats.
Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
• Les questions *à réponse brute* sont numérotées L1, L2, etc.
Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
• Les questions *à réponse rédigée* sont numérotées RI, R2, etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

CONSEILS DE BON SENS

• L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
• Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
• Ne répondez jamais au hasard à une question à choix multiples !
• Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Pot pourri de calcul algébrique

☐ **M1** Le nombre $2\sqrt{42}-13$ est :

A positif   B négatif

☐ **M2** Le nombre $\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{8}-\sqrt{3}$ est :

A positif   B négatif

☐ **M3** Le nombre $\dfrac{\sqrt{6}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ est aussi égal à :

A $\sqrt{6}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ B $\sqrt{3}$ C $6\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ D $6\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ E $\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

☐ **M4** On dispose d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 5 cm, et le périmètre 12 cm. L'aire de ce triangle est alors de :

A 6 cm^2 B aucune de ces réponses   C 5 cm^2 D 3 cm^2 E 2 cm^2

☐ **M5** On dispose d'un triangle équilatéral dont l'aire vaut 1cm^2. Le périmètre de ce triangle est alors de :

A $2\sqrt{\sqrt{3}}$ cm   B $\sqrt{6}$ cm   C 6 cm   D $2\sqrt{3}$ cm   E $2\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{3}}$ cm

☐ **M6** Soit a, b, c trois réels vérifiant les égalités

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a+b+c & = & 2 \\ a+2b+c & = & 4 \\ a+b+2c & = & 6. \end{array}\right.$$

La somme $a+b+c$ vaut alors :

A 0   B 1   C 3   D 4   E 2

☐ **DM7** Soit a et b deux réels tels que $a \geqslant |b|$. Le carré de $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$ vaut systématiquement :

A $2\left(|a|-|b|\right)$ B $2(a+b)$ C $-2(a+b)$ D $2(a+|b|)$ E $2(|a|+b)$

☐ **M8** L'ensemble des réels $x \neq 2$ vérifiant simultanément les inéquations $x\left(x^2-1\right) \geqslant 0$ et $\dfrac{x^2-(2x-3)^2}{2-x} \leqslant 0$ est :

A La réunion de deux intervalles disjoints de longueur 1, dont exactement un est un segment

B La réunion de deux intervalles disjoints de longueur 1, dont aucun n'est un segment

C La réunion de deux segments de longueur 2

D La réunion de deux intervalles disjoints de longueur 2, dont aucun n'est un segment

E La réunion de deux intervalles disjoints de longueur 2, dont exactement un est un segment

△ **L1** Donner sans justification les solutions réelles de l'équation $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$.

△ **L2** Donner sans justification les solutions réelles de l'équation

$$\left(\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\right)^3 + \left(\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\right)^2 + \left(\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\right) + 1 = 0.$$

◯ **R1** Soit n un entier naturel non nul. On considère les entiers

$$x = \underbrace{11\dots1}_{2n\,\text{chiffres}} \quad \text{et} \quad y = \underbrace{22\dots2}_{n\,\text{chiffres}}$$

Démontrer que $\sqrt{x-y}$ est un entier.

◯ **R2** Soit a, b et c trois réels positifs. Démontrer que l'un des réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$.

On pourra commencer par s'intéresser à $x(1-x)$ pour x réel.

Exercice 2. Semi-inverses d'une fonction

Dans tout cet exercice, on se donne deux fonctions f et g, définies en tout réel et à valeurs réelles. On introduit quatre conditions :

- $(f,\ g)$ vérifie C_1 lorsque $g(f(x)) = x$ pour tout réel x.
- $(f,\ g)$ vérifie C_2 lorsque $f[g(y)] = y$ pour tout réel y.
- $(f,\ g)$ vérifie C_3 lorsque $f(g[f(x)]) = f(x)$ pour tout réel x.
- $(f,\ g)$ vérifie C_4 lorsque $g(f[g(y)]) = g(y)$ pour tout réel y.

Par exemple :

- lorsque $f(x) = \dfrac{x}{2}$ pour tout réel x, et $g(y) = 2y$ pour tout réel y, les conditions C_1 et C_2 sont évidemment vérifiées ;
- lorsque $f(x) = \dfrac{x}{2}$ pour tout réel x, et $g(y) = y+1$ pour tout réel y, la condition C_1 n'est pas vérifiée, car l'égalité $\dfrac{x}{2} + 1 = x$ ne vaut pas pour $x = 0$ (par exemple).

Pour un réel y, on pose $\text{sgn}(y) = 1$ si $y \geqslant 0$,et $\text{sgn}(y) = -1$ si $y < 0$.
On dit qu'une fonction est constante lorsqu'elle ne prend qu'une seule valeur.
On introduit enfin les cinq fonctions particulières f_1, f_2, g_1, g_2 et g_3 qui suivent :

- f_1 associe à tout réel x le réel $f_1(x) = e^x$;
- $f_2$associe à tout réel x le réel $f_2(x) = x^2$;
- g_1 associe à tout réel y le réel $g_1(y) = \ln(y)$ si $y > 0$, et $g_1(y) = 0$ sinon ;
- g_2 associe à tout réel y le réel $g_2(y) = \sqrt{|y|}$;
- g_3 associe à tout réel y le réel $g_3(y) = \text{sgn}(y) \cdot \sqrt{|y|}$.
  Par exemple, $g_3(-4) = -2$ et $g_3(9) = 3$.

Vrai ou faux ?

Dans les questions **M9** à **M27**,on demande d'évaluer la validité des affirmations indiquées.

☐ **M9** La condition C_1 est vérifiée par le couple (f_1, g_1).

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M10** La condition C_2 est vérifiée par le couple (f_1, g_1).

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M11** La condition C_1 est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M12** La condition C_2 est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M13** La condition C_3 est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M14** La condition C4 est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M15** La condition C_1 est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M16** La condition C_2 est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M17** La condition C_3 est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M18** La condition C_4 est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M19** Quel que soit le choix des fonctions f et g, si la condition C_1 est vérifiée alors la condition C_2 l'est aussi.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M20** Quel que soit le choix des fonctions f et g, si les conditions C_3 et C_4 sont vérifiées alors la condition C_1 est vérifiée.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M21** Quel que soit le choix des fonctions f et g, si la condition C_1 est vérifiée alors les conditions C_3 et C_4 sont vérifiées.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M22** Si C_1 est vérifiée alors f prend toutes les valeurs réelles possibles.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M23** Si C_1 est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles alors C_2 est vérifiée.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M24** Si C_3 est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles alors C_1 est vérifiée.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M25** Si C_3 est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles alors C_2 est vérifiée.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M26** Pour la fonction f qui à x associe $x+1$:

$\boxed{\text{A}}$ Il n'existe aucune fonction g telle que C_1 soit vérifiée
$\boxed{\text{B}}$ Il existe plusieurs fonctions g telles que C_1 soit vérifiée
$\boxed{\text{C}}$ Il existe exactement une fonction g telle que C_1 soit vérifiée

☐ **M27** Pour la fonction f qui à x associe $|x|$:

$\boxed{\text{A}}$ Il existe exactement une fonction g tel que C_1 soit vérifiée
$\boxed{\text{B}}$ Il existe plusieurs fonctions g telles que C_1 soit vérifiée
$\boxed{\text{C}}$ Il n'existe aucune fonction g telle que C_1 soit vérifiée

△ **L1** On suppose que la fonction g est constante. Expliciter sans démonstration les fonctions f telles que C_3 soit vérifiée.

◯ **R3** Démontrer que f est constante si et seulement si la propriété C_3 est vérifiée quelle que soit la fonction g.

Suite itérée croisée

On fixe un réel a et l'on définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à termes réels en posant $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \begin{cases} g(u_n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ f(u_n) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

☐ **M28** En supposant validée la condition C_2, quelle est, parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies indépendamment des choix de a, f et g, celle qui apporte l'information la plus précise ?

$\boxed{\text{A}}$ La suite u prend un nombre fini de valeurs ou une infinité de valeurs
$\boxed{\text{B}}$ La suite u prend au plus 4 valeurs distinctes
$\boxed{\text{C}}$ La suite u est constante
$\boxed{\text{D}}$ La suite u prend au plus 3 valeurs distinctes
$\boxed{\text{E}}$ La suite u prend au plus 2 valeurs distinctes

☐ **M29** En supposant validée la condition C_3, quelle est, parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies indépendamment des choix de a, f et g, celle qui apporte l'information la plus précise ?

$\boxed{\text{A}}$ La suite u prend au plus 2 valeurs distinctes
$\boxed{\text{B}}$ La suite u prend au plus 5 valeurs distinctes
$\boxed{\text{C}}$ La suite u prend un nombre fini de valeurs ou une infinité de valeurs
$\boxed{\text{D}}$ La suite u prend au plus 4 valeurs distinctes
$\boxed{\text{E}}$ La suite u prend au plus 3 valeurs distinctes

☐ **M30** En supposant validée la condition C_4, quelle est, parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies indépendamment des choix de a, f et g, celle qui apporte l'information la plus précise ?

$\boxed{\text{A}}$ La suite u prend au plus 5 valeurs distinctes
$\boxed{\text{B}}$ La suite u prend au plus 2 valeurs distinctes
$\boxed{\text{C}}$ La suite u prend au plus 3 valeurs distinctes
$\boxed{\text{D}}$ La suite u prend un nombre fini de valeurs ou une infinité de valeurs
$\boxed{\text{E}}$ La suite u prend au plus 4 valeurs distinctes

Exercice 3. Étude d'une famille de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les fonctions :

$$h_n(x) = n!\mathrm{e}^x - x^n \qquad \text{et} \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{n!\mathrm{e}^x - x}$$

On note $\mathscr{D}_n$ le domaine de définition de la fonction f_n.

Domaine de définition

Pour commencer, raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour montrer la propriété :

$$\mathscr{H}_n : \text{« Pour tout } x \geqslant 0,\ h_n(x) > 0 \text{ »}$$

(A) Commençons par l'initialisation. La fonction exp est convexe donc sa courbe est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.
(B) Cette tangente a pour équation $y = x + 1$ donc, pour tout x 0, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ donc $h_1(x) \geqslant 1 > 0$. Ainsi $\mathscr{H}_1$ est vraie.
(C) Passons à l'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{H}_n$ soit vraie. La fonction h_{n+1} est dérivable et, pour tout $x \geqslant 0$

$$h'_{n+1}(x) = (n+1)!\mathrm{e}^x - (n+1)x^n = (n+1)h_n(x)$$

(D) La propriété $\mathscr{H}_n$ étant vraie, on a, pour tout $x \geqslant 0$, $h_n(x) > 0$ puisque $(n+1) > 0$. Donc h_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
(E) La fonction h_{n+1} étant strictement croissante sur R_+, on a pour tout $x \geqslant 0$,

$$h_{n+1}(x) > h_{n+1}(0) = (n+1)! > 0$$

Ainsi $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence, on conclut alors que $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

☐ **M31** L'étape (A) est entièrement correcte.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\qquad$ $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M32** L'étape (B) est entièrement correcte.

A Vrai B Faux

☐ **M33** L'étape (C) est entièrement correcte.

A Faux B Vrai

☐ **M34** L'étape (D) est entièrement correcte.

A Faux B Vrai

☐ **M35** L'étape (E) est entièrement correcte.

A Faux B Vrai

L'ensemble du raisonnement détaillé ci-dessus comporte peut-être des erreurs, mais sa conclusion est correcte et nous l'admettrons : la propriété H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
☐ **M36** La fonction h_n est strictement positive sur $\mathbb{R}$ lorsque n est impair.

A Faux B Vrai

☐ **M37** La fonction h_n est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ lorsque n est pair.

A Faux B Vrai

☐ **M38** Des résultats précédents on peut déduire que :

A $\mathbb{R}_+$ B $D_n \subset \mathbb{R}_+$ C $D_n \subset \mathbb{R}_+^*$ D $D_n = \mathbb{R}$ E $\mathbb{R}_- \subset D_n$

☐ **M39** Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'ensemble D_n est égal :
A à $\mathbb{R}$ si n est impair, et $\mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$ si n est pair, pour un $\alpha < 0$ indépendant de n
B à $\mathbb{R}\backslash\{\alpha_n\}$ pour un $\alpha_n < 0$ dépendant de n
C à $\mathbb{R}$ si n est impair, et $\mathbb{R}\backslash\{\alpha_n\}$ si n est pair, pour un $\alpha_n < 0$ dépendant de n
D à $\mathbb{R}$ si n est pair, et $\mathbb{R}\backslash\{\alpha_n\}$ si n est impair, pour un $\alpha_n < 0$ dépendant de n
E à $\mathbb{R}$ si n est pair, et $\mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$ si n est impair, pour un $\alpha < 0$ indépendant de n

Analyse des valeurs prises par f_n

☐ **M40** La limite de f_n en $+\infty$ est :

A -1 B $+\infty$ C elle dépend de n D 0 E $-\infty$

☐ **M41** La limite de f_n en $-\infty$ est :

A elle dépend de n B -1 C $+\infty$ D $-\infty$ E 0

Dans la suite, on introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel

$$\theta_n = \frac{n^n}{n!\mathrm{e}^n - n^n}.$$

△ **L4** Expliciter, selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, les points d'annulation de la dérivée de f_n.

☐ **M42** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair. L'ensemble des valeurs prises par la fonction f_n est :

$\boxed{\text{A}}$ $]-\infty\,;\,-1[\cup]0\,;\,+\infty[$
$\boxed{\text{B}}$ $]-\infty\,;\,-1[\cup[0\,;\,\theta_n]$
$\boxed{\text{C}}$ $]-1\,;\,\theta_n]$
$\boxed{\text{D}}$ $]-\infty, -1[\cup[0\,;\,+\infty[$
$\boxed{\text{E}}$ $]-\infty\,;\,-1[\cup]0\,;\,\theta_n]$

☐ **M43** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pair. L'ensemble des valeurs prises par la fonction f_n est :

$\boxed{\text{A}}$ $]-1\,;\,\theta_n]$
$\boxed{\text{B}}$ $]-\infty\,;\,-1[\cup]0\,;\,\theta_n]$
$\boxed{\text{C}}$ $]-\infty\,;\,-1[\cup[0\,;\,\theta_n]$
$\boxed{\text{D}}$ $]-\infty\,;\,-1[\cup]0\,;\,+\infty[$
$\boxed{\text{E}}$ $]-\infty\,;\,-1[\cup[0\,;\,+\infty[$

Extremums

Une fonction h est dite **majorée** lorsqu'il existe un réel supérieur à toutes les valeurs prises par h, et **minorée** lorsqu'il existe un réel inférieur à toutes les valeurs prises par h.
On dit que h **admet un maximum** lorsqu'il existe un élément x_0 où h est définie et $h(x_0)$ est supérieur (ou égal) à toute valeur prise par h ; on dit que h **admet un minimum** lorsqu'il existe un élément x_0 où h est définie et $h(x_0)$ est inférieur (ou égal) à toute valeur prise par h.

☐ **M44** Sur $\mathscr{D}_n$, la fonction f_n est majorée :

$\boxed{\text{A}}$ si n est pair, et seulement dans ce cas
$\boxed{\text{B}}$ si n est impair, et seulement dans ce cas
$\boxed{\text{C}}$ quelle que soit la valeur de n
$\boxed{\text{D}}$ jamais

☐ **M45** Sur $\mathscr{D}_n$, la fonction f_n admet un maximum :

$\boxed{\text{A}}$ quelle que soit la valeur de n
$\boxed{\text{B}}$ si n est impair, et seulement dans ce cas
$\boxed{\text{C}}$ si n est pair, et seulement dans ce cas
$\boxed{\text{D}}$ jamais

☐ **M46** Sur $\mathscr{D}_n$, la fonction f_n est minorée :

$\boxed{\text{A}}$ si n est pair, et seulement dans ce cas
$\boxed{\text{B}}$ jamais
$\boxed{\text{C}}$ quelle que soit la valeur de n
$\boxed{\text{D}}$ si n est impair, et seulement dans ce cas

☐ **M47** Sur $\mathscr{D}_n$, la fonction f_n admet un minimum :

$\boxed{\text{A}}$ jamais

$\boxed{B}$ quelle que soit la valeur de n
$\boxed{C}$ si n est pair, et seulement dans ce cas
$\boxed{D}$ si n est impair, et seulement dans ce cas

Exercice 4. Ensembles bien ordonnés

Soit A un ensemble formé de nombres réels (autrement dit, une partie de $\mathbb{R}$).

- Un plus petit élément de A est un élément a de A tel que $a \leqslant x$ pour tout x dans A.
- Un plus grand élément de A est un élément b de A tel que $x \leqslant b$ pour tout x dans A.

On dit que A est bien ordonné lorsque toute partie non vide de A admet un plus petit élément. Par exemple :

- $\{0 ; 1\}$ est bien ordonné car ses parties non vides sont $\{0 ; 1\}$, $\{0\}$ et $\{1\}$, et chacune a un plus petit élément (respectivement : 0, 0 et 1) ;
- $\mathbb{N}$ est bien ordonné (cela doit être considéré comme évident) ;
- $[0 ; 1]$ n'est pas bien ordonné car, par exemple, $\left]\dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3}\right]$ est dénué de plus petit élément bien que non vide.

On rappelle enfin qu'un ensemble est fini lorsqu'il n'a qu'une quantité finie d'éléments, et infini dans le cas contraire (par exemple, le segment $[0; 1]$ est infini).

$\triangle$ **L5** Parmi les ensembles suivants, indiquer sans démonstration lesquels sont bien ordonnés :

$$\{0 ; 1 ; \sqrt{2}\}, \quad [0 ; +\infty[, \quad]0 ; 1], \quad \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}$$

☐ **M48** Une partie bien ordonnée et non vide de $\mathbb{R}$:

$\boxed{A}$ peut n'avoir ni plus grand élément, ni plus petit élément
$\boxed{B}$ admet nécessairement un plus grand élément, mais pas nécessairement un plus petit élément
$\boxed{C}$ admet nécessairement un plus grand élément et un plus petit élément
$\boxed{D}$ admet nécessairement un plus petit élément, mais pas nécessairement un plus grand élément

Vrai ou faux ?

Dans les questions **M49** à **M54**, on demande d'évaluer la validité des affirmations indiquées.

☐ **M49** Toute partie finie de $\mathbb{R}$ est bien ordonnée.

$\boxed{A}$ Faux $\boxed{B}$ Vrai

☐ **M50** Toute partie bien ordonnée de $\mathbb{R}$ est finie.

$\boxed{A}$ Vrai $\boxed{B}$ Faux

☐ **M51** Tout sous-ensemble non vide d'un ensemble bien ordonné est bien ordonné.

$\boxed{A}$ Vrai $\boxed{B}$ Faux

☐ **M52** L'ensemble constitué des nombres de la forme $\dfrac{n-1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est bien ordonné.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M53** L'ensemble constitué des nombres de la forme $\dfrac{1}{n}$

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M54** L'ensemble constitué des nombres de la forme $\dfrac{n^2+1}{2\,023n+\sin(n)+1}$, avec $n \in \mathbb{N}$ est bien ordonné.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

△ **R4** Justifier votre réponse à la question **M54**.

Exercice 5. Logique

Lorsque A et B sont deux propositions, on rappelle que « si A alors B »signifie que A est fausse ou A et B sont simultanément vraies.
Un groupe d'archéologues arrive devant une porte protégée par un mécanisme. Face à eux se trouvent trois leviers numérotés de 1 à 3. Chaque levier est levé ou baissé.
Au-dessus de chaque levier se trouve une affirmation :

- **Affirmation 1** : Le levier 2 est baissé et le levier 3 est levé.
- **Affirmation 2** : Si le levier 1 est levé alors le levier 3 est levé.
- **Affirmation 3** : Le levier 3 est levé et au moins l'un des autres est baissé.

☐ **M55** Quelle est la négation de l'affirmation 1 ?

$\boxed{\text{A}}$ Le levier 3 est baissé ou le levier 2 est levé
$\boxed{\text{B}}$ Si le levier 2 est levé alors le levier 3 est baissé
$\boxed{\text{C}}$ Le levier 2 est levé et le levier 3 est baissé
$\boxed{\text{D}}$ Si le levier 3 est baissé alors le levier 2 est levé

☐ **M56** Quelle est la négation de l'affirmation 2 ?

$\boxed{\text{A}}$ Si le levier 3 est baissé alors le levier 1 est levé
$\boxed{\text{B}}$ Le levier 1 est levé et le levier 3 est baissé
$\boxed{\text{C}}$ Le levier 1 est baissé et le levier 3 est levé
$\boxed{\text{D}}$ Si le levier 3 est levé alors le levier 1 est levé
$\boxed{\text{E}}$ Si le levier 1 est levé alors le levier 3 est levé

☐ **M57** Quelle est la négation de l'affirmation 3 ?

$\boxed{\text{A}}$ Le levier 3 est baissé et au moins l'un des autres est levé
$\boxed{\text{B}}$ Le levier 3 est baissé et les deux autres sont levés
$\boxed{\text{C}}$ Le levier 3 est baissé ou au moins l'un des autres est levé
$\boxed{\text{D}}$ Le levier 3 est baissé ou les deux autres sont levés

Pour les questions **M58** à **M60**, on suppose la proposition suivante vraie :

Proposition A : Les affirmations 1, 2 et 3 sont toutes vraies.

☐ **M58** Le levier 1 est-il levé ou baissé ?

$\boxed{\text{A}}$ Baissé $\boxed{\text{B}}$ Les deux sont possibles $\boxed{\text{C}}$ Levé $\boxed{\text{D}}$ La proposition A est absurde

☐ **M59** Le levier 2 est-il levé ou baissé ?

$\boxed{\text{A}}$ Les deux sont possibles $\boxed{\text{B}}$ Baissé $\boxed{\text{C}}$ La proposition A est absurde $\boxed{\text{D}}$ Levé

☐ **M60** Le levier 3 est-il levé ou baissé ?

$\boxed{\text{A}}$ Baissé $\boxed{\text{B}}$ Levé $\boxed{\text{C}}$ La proposition A est absurde $\boxed{\text{D}}$ Les deux sont possibles

Pour les questions **M61** à **M63**, on suppose la proposition suivante vraie :

Proposition B : Les affirmations 1, 2 et 3 sont toutes fausses.

☐ **M61** Le levier 1 est-il levé ou baissé ?

$\boxed{\text{A}}$ La proposition B est absurde $\boxed{\text{B}}$ Baissé $\boxed{\text{C}}$ Les deux sont possibles $\boxed{\text{D}}$ Levé

☐ **M62** Le levier 2 est-il levé ou baissé ?

$\boxed{\text{A}}$ Levé $\boxed{\text{B}}$ La proposition B est absurde $\boxed{\text{C}}$ Baissé $\boxed{\text{D}}$ Les deux sont possibles

☐ **M63** Le levier 3 est-il levé ou baissé ?

$\boxed{\text{A}}$ La proposition B est absurde $\boxed{\text{B}}$ Baissé $\boxed{\text{C}}$ Levé $\boxed{\text{D}}$ Les deux sont possibles

Pour les questions **M64** à **M66**, on suppose la proposition suivante vraie :

Proposition C : Exactement une des affirmations 1 à 3 est fausse.

☐ **M64** Le levier 1 est-il levé ou baissé ?

$\boxed{\text{A}}$ La proposition C est absurde $\boxed{\text{B}}$ Baissé $\boxed{\text{C}}$ Les deux sont possibles $\boxed{\text{D}}$ Levé

☐ **M65** Le levier 2 est-il levé ou baissé ?

$\boxed{\text{A}}$ Levé $\boxed{\text{B}}$ La proposition C est absurde $\boxed{\text{C}}$ Baissé $\boxed{\text{D}}$ Les deux sont possibles

☐ **M66** Le levier 3 est-il levé ou baissé ?

$\boxed{\text{A}}$ Les deux sont possibles $\boxed{\text{B}}$ Levé $\boxed{\text{C}}$ La proposition C est absurde $\boxed{\text{D}}$ Baissé

Pour les questions **M67** à **M69**, on suppose la proposition suivante vraie :

Proposition D : Pour tout entier $i \in \{1~;~2~;~3\}$, l'affirmation i est vraie si et seulement si le levier i est levé.

☐ **M67** Le levier 1 est-il levé ou baissé ?

$\boxed{\text{A}}$ Baissé $\boxed{\text{B}}$ La proposition D est absurde $\boxed{\text{C}}$ Levé $\boxed{\text{D}}$ Les deux sont possibles

☐ **M68** Le levier 2 est-il levé ou baissé ?

$\boxed{\text{A}}$ Baissé $\boxed{\text{B}}$ Les deux sont possibles $\boxed{\text{C}}$ Levé $\boxed{\text{D}}$ Les deux sont possibles

☐ **M69** Le levier 3 est-il levé ou baissé ?

A Baissé B Les deux sont possibles C La proposition D est absurde D Levé

Exercice 6. Nombre de distances entre *n* points du plan

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et $E = \{P_1, \ldots, P_n\}$ un ensemble constitué d'exactement n points du plan. On note D l'ensemble des distances entre ces points, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels $d > 0$ pour lesquels il existe deux points distincts P_i et P_j tels que $d = P_iP_j$. On note m le nombre d'éléments de D, appelé nombre de distances de E.

☐ **M70** On suppose dans cette question que $n = 3$. La plus petite valeur possible pour m est alors :

A 3 B 1 C 2 D 4 E 5

☐ **M71** Sachant que les points de E sont alignés ou sur un même demi-cercle, la plus petite valeur possible pour m est :

A $2n-1$ B $2n+1$ C $n-1$ D $2n$ E n

△ **R5** Déterminer la plus grande valeur possible pour m sachant que les points de E sont alignés.

△ **L6** On suppose $4 \leqslant n \leqslant 5$. Donner sans démonstration la plus petite valeur possible pour m.

△ **L7** On suppose $n = 6$. Donner sans démonstration la plus petite valeur possible pour m.

☐ **M72** Vrai ou faux ?
Si $n = 7$ et $m = 3$ alors E forme un polygone régulier à 7 sommets.

A Vrai B Faux

☐ **M73** L'affirmation « dès que des points de E sont à même distance de P_1 ces points sont sur un même demi-cercle de centre P_1 » :

A est vraie si P_1P_2 est le plus grand élément de D, mais peut tomber en défaut sinon
B est toujours vraie
C peut être fausse même si P_1P_2 est le plus grand élément de D

On note k le plus grand nombre possible de points de E que l'on puisse placer sur un même cercle de centre P_1.
On note ℓ le nombre de réels distincts parmi $P_1P_2,\ P_1P_3, \ldots,\ P_1P_n$.

△ **L8** Donner un réel a, en fonction de n et k et le plus grand possible, tel que $\ell \geqslant a$.

On suppose, en vue de la dernière question, que P_1P_2 est le plus grand élément de D.

☐ **M74** En combinant les minorations de m déduites des questions **M71** et **L8**, et en examinant les valeurs possibles pour k, l'inégalité la plus fine que l'on puisse obtenir est :

A $m \geqslant \dfrac{n}{2}$ B $m \geqslant \sqrt{n}$ C $m \geqslant \sqrt{n}-1$ D $m \geqslant \dfrac{n}{4}$ D $m \geqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{n}$